

doi: 10.12052/gdutxb.170142

噪声依赖状态和控制的 时滞非线性随机系统Nash微分博弈

李洁茗¹, 朱怀念²

(1. 广东工业大学 国际教育学院, 广东 广州 511495; 2. 广东工业大学 经济与贸易学院, 广东 广州 510520)

摘要: 研究了一类噪声依赖于状态和控制的时滞非线性随机系统的2人Nash微分博弈问题, 借助4个耦合的Hamilton-Jacobi方程组(HJEs)得到了Nash均衡策略存在的充分条件, 即耦合HJEs如果存在解, Nash均衡策略就存在. 同时给出了Nash均衡策略的显式表达. 最后, 通过一个数值算例验证了文中所得结论的有效性.

关键词: 时滞非线性随机系统; 微分博弈; Nash均衡; Hamilton-Jacobi方程组

中图分类号: F224.32

文献标志码: A

文章编号: 1007-7162(2018)01-0041-05

Nash Differential Games for Delayed Nonlinear Stochastic Systems with State-and Control-dependent Noise

Li Jie-ming¹, Zhu Huai-nian²

(1. School of International Education, Guangdong University of Technology, Guangzhou 511495, China; 2. School of Economics & Commerce, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510520, China)

Abstract: The problem of two-person Nash differential games for delayed nonlinear stochastic systems with state-and control-dependent noise is discussed. A sufficient condition for the existence of the Nash equilibrium strategy is presented in terms of coupled Hamilton-Jacobi equations (HJEs). And meanwhile, the explicit expression of the equilibrium strategy is given. In the end, a numeric example is employed to show the effectiveness of the obtained results.

Key words: delayed nonlinear stochastic systems; differential game; Nash equilibrium; Hamilton-Jacobi equations

1 研究背景

微分博弈作为对动态系统进行建模和分析的一种非常有用的工具, 已在经济、金融保险、无线频谱市场、智能电网和网络安全等领域得到了广泛应用(详见文献[1-4]及其所引文献). 微分博弈理论研究的动态系统也从线性拓展到了非线性^[5-9]. 文献[5]研究了一类噪声依赖于状态的非线性随机系统的动态博弈问题, 利用配方法得到了博弈的Pareto最优策略和Nash均衡策略. 文献[6]讨论了包含多个博弈参与人的非线性随机系统的动态博弈问题, 利用随机最大值原理给出了开环Nash均衡存在的必要条件. 文献[7]针对一类双人非线性系统的Nash微分博

弈问题, 利用T-S模糊建模方法求得了Nash均衡解的形式. 文献[8-9]分别研究了有限和无限时间内噪声依赖于状态, 控制输入及外部干扰情形下的非线性随机Itô系统的 H_2/H_∞ 控制问题, 该类问题的分析求解实际上是寻找满足一定条件的Nash均衡点 (u^*, v^*) .

另一方面, 随着认识和研究的逐步深入, 人们发现系统的发展趋势会同时受到当前状态和过去历史的影响, 因而“时滞”现象开始引起学者们的关注, 研究成果不断涌现. 本文主要关注时滞系统的微分博弈方面, 在该方面的研究中, 日本广岛大学的Mukaidani教授所做的工作最为突出, 他及其合作者针对时滞线性随机系统和时滞线性Markov跳跃系统微分博弈的Nash均衡策略及Pareto最优策略问题做

收稿日期: 2017-09-27

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71571053); 广东省自然科学基金资助项目(2015A030310218, 2016A030313701); 广东省教育厅普通高校特色创新项目(2015WTSCX014)

作者简介: 李洁茗(1985-), 女, 助教, 硕士, 主要研究方向为博弈论及商务管理.

出了系统的探讨(详见文献[10-11]及其所引用文献)。

虽然时滞系统和非线性随机系统的微分博弈研究已经取得了较丰富的成果,但针对时滞非线性随机系统Nash微分问题的研究仍然未见报道。文献[12]虽然讨论了噪声依赖状态情形下的时滞非线性随机系统的 H_2/H_∞ 控制,并指出 H_2/H_∞ 控制策略的求解等同于寻找相应博弈问题的Nash均衡点,但该文并未对该类系统的Nash微分博弈问题展开详细讨论。同时,该文的工作也只考虑了噪声依赖状态的情形。在实际应用中,噪声除了依赖状态外,可能还同时依赖于控制和外部干扰,这种系统在金融数学中经常出现[13]。因此,研究噪声依赖状态和控制的时滞非线性随机系统的Nash微分博弈问题具有较好的理论意义和实际应用价值。

基于此,本文讨论噪声依赖状态和控制的时滞非线性随机系统的Nash微分问题,推导Nash均衡策略存在的条件,给出均衡策略的显式表达,并通过数值算例验证文章所得结论的有效性。

为表述简洁起见,本文采用 \mathbf{R}^+ 表示所有非负实数; \mathbf{R}^n 和 $\mathbf{R}^{n \times m}$ 表示 n -维欧氏空间和 $n \times m$ 维实矩阵空间; \mathbf{M}^T 表示矩阵 \mathbf{M} 的转置; $\mathbf{M} > 0$ 表示 \mathbf{M} 是一个正定对称矩阵;对于向量 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $\|\mathbf{x}\|$ 表示欧氏范数; $L^2_{\mathbf{F}}(\mathbf{R}^+; \mathbf{R}^l)$ 表示关于 σ -代数 $\mathbf{F}_t(t \geq 0)$ 可料,并且满足 $E \int_0^\infty \|\mathbf{y}(t)\|^2 dt < \infty$ 的随机过程 $\mathbf{y}(t) \in \mathbf{R}^l$ 构成的空间; $C^{2,1}(\mathbf{R}^n; \mathbf{R}^+)$ 表示所有定义于 $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^+$ 的函数 $V(x, t)$,其中 $V(x, t)$ 关于 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ 二阶连续可微,关于 $t \in \mathbf{R}^+$ 一阶连续可微; $C([- \tau, 0]; \mathbf{R}^n)$ 表示定义于 $[- \tau, 0]$ 取值于 \mathbf{R}^n 的连续函数空间; $C^b_{F_0}([- \tau, 0]; \mathbf{R}^n)$ 表示所有 F_0 -可测取值于 $C([- \tau, 0]; \mathbf{R}^n)$ 的有界随机变量 $\xi = \{\xi(\theta), -\tau \leq \theta \leq 0\}$ 构成的空间; $E[\cdot]$ 表示数学期望。

2 问题描述

为表述简便,本文仅考虑2个博弈参与者组成的博弈系统, N 个博弈参与者可类似分析。博弈系统由下述Itô型非线性时滞随机微分方程描述:

$$\begin{cases} d\mathbf{x}(t) = [\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau)) + \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau))\mathbf{u}(t) + \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau))\mathbf{v}(t)] dt + [\mathbf{l}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau)) + \\ \mathbf{q}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau))\mathbf{u}(t) + \mathbf{s}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau))\mathbf{v}(t)] d\mathbf{w}(t), \quad t > 0, \\ \mathbf{x}(t) = \phi(t) \in C^b_{F_0}([- \tau, 0]; \mathbf{R}^n), \quad -\tau \leq t \leq 0, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^{n_u}$, $\mathbf{v}(t) \in \mathbf{R}^{n_v}$ 分别表示系统的状态变量,博弈参与者1的决策控制变量和博弈参与者2的决策控制变量。 $\mathbf{w}(t)$ 是一个定义在完备概率空间 $(\Omega, \mathbf{F}, \{\mathbf{F}_t\}_{t \in \mathbf{R}^+}, \mathbf{P})$ 上的一维标准布朗运动,其中 $\{\mathbf{F}_t\}_{t \in \mathbf{R}^+}$ 是一个满足通常条件(即递增、右连续且

包含所有的零概率集)的 σ -代数流。不失一般性,假定 $\{\mathbf{F}_t\}_{t \in \mathbf{R}^+}$ 就是 $\mathbf{w}(t)$ 生成的自然流,即 $\{\mathbf{F}_t\}_{t \in \mathbf{R}^+} = \sigma\{\mathbf{w}(s), 0 \leq s \leq t\}$ 。为保证式(1)存在唯一的强解,假设 $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathbf{l}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathbf{q}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 和 $\mathbf{m}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 为满足局部Lipschitz条件和线性增长条件的连续函数,且 $\mathbf{f}(0, 0) = \mathbf{l}(0, 0) = \mathbf{m}(0, 0) = 0$ [14]。

参照基于Nash微分博弈求解 H_2/H_∞ 控制策略的经典文献[15],设置博弈参与者1和2的性能指标 $J_1(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 和 $J_2(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 如下:

$$J_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = E \int_0^\infty [\|\mathbf{m}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau))\|^2 + \|\mathbf{u}(t)\|^2] dt, \quad (2a)$$

$$J_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = E \int_0^\infty [\|\mathbf{n}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau))\|^2 + \|\mathbf{v}(t)\|^2] dt, \quad (2b)$$

注意到式(2)中,博弈参与者1的性能指标 $J_1(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 中并未包含博弈参与者2的决策控制变量 \mathbf{v} ,博弈参与者2的性能指标 $J_2(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 中也未包含博弈参与者1的决策控制变量 \mathbf{u} 。但因为 \mathbf{u} 和 \mathbf{v} 均包含在随机系统(1)中,故性能指标 $J_1(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 和 $J_2(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 会同时受到 \mathbf{u} 和 \mathbf{v} 的影响。

在不引起混淆的情况下,后文的部分分析会省略时间 t ,并将 $\mathbf{x}(t-\tau)$ 简单记为 \mathbf{x}_τ 。对给定的 $V(\mathbf{x}, t) \in C^{2,1}(\mathbf{R}^n; \mathbf{R}^+)$,相应于系统(1)的微分算子 $LV: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ 定义如下:

$$\begin{aligned} LV(\mathbf{x}, t) = & \frac{\partial V(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial V^T(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_\tau) + \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_\tau)\mathbf{u} + \\ & \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_\tau)\mathbf{v}] + \frac{1}{2} [\mathbf{l}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_\tau) + \mathbf{q}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_\tau)\mathbf{u} + \mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_\tau)\mathbf{v}]^T \times \\ & \frac{\partial^2 V(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}^2} [\mathbf{l}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_\tau) + \mathbf{q}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_\tau)\mathbf{u} + \mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_\tau)\mathbf{v}], \end{aligned} \quad (3)$$

其中 $\frac{\partial V(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} = \left[\frac{\partial V(\mathbf{x}, t)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V(\mathbf{x}, t)}{\partial x_n} \right]^T$, $\frac{\partial^2 V(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}^2} = \left(\frac{\partial^2 V(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{n \times n}$ 。

给定博弈系统(1)和性能指标(2),寻找最优反馈控制策略组合 $(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*)$,使得下述不等式成立:

$$J_1(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*) \leq J_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}^*), \quad \forall \mathbf{u} \in L^2_{\mathbf{F}}(\mathbf{R}^+; \mathbf{R}^{n_u});$$

$$J_2(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*) \leq J_2(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in L^2_{\mathbf{F}}(\mathbf{R}^+; \mathbf{R}^{n_v}).$$

这样的 $(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*)$ 称为博弈问题的Nash均衡点。

由于在无限时间域上进行分析,为了保证研究问题有意义,需要引入随机系统稳定性的相关概念。

定义1[12] 考虑下述时滞非线性随机系统:

$$\begin{cases} d\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau)) dt + \mathbf{l}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau)) d\mathbf{w}(t), \quad t > 0, \\ \mathbf{x}(t) = \phi(t) \in C^b_{F_0}([- \tau, 0]; \mathbf{R}^n), \quad -\tau \leq t \leq 0. \end{cases} \quad (4)$$

如果它是依概率全局渐近稳定的,即 $\mathbf{P}(\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = 0) = 1$,则称系统(4)是内部稳定的。

下述引理给出了时滞非线性随机Itô系统仿射二

次调节器(Affine quadratic regulator, AQR)的主要结果.

引理 1 考虑下述优化问题:

$$\inf_{u \in L^2_{\mathbb{F}}(\mathbf{R}^+; \mathbf{R}^{n_u})} J(u) = E \int_0^{\infty} [\|m(x(t), x(t-\tau))\|^2 + \|u(t)\|^2] dt, \quad (5)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} dx(t) = [f(x(t), x(t-\tau)) + g(x(t), x(t-\tau))u(t)] dt + \\ [l(x(t), x(t-\tau)) + q(x(t), x(t-\tau))u(t)] dw(t), \quad t > 0, \\ x(t) = \phi(t) \in C_{\mathbb{F}_0}^b([- \tau, 0]; \mathbf{R}^n), \quad -\tau \leq t \leq 0. \end{cases} \quad (6)$$

如果存在一个非负函数 $V(x, t) \in C^{2,1}(\mathbf{R}^n; \mathbf{R}^+)$, 满足如下HJE:

$$\begin{cases} \Theta(x, y, t) = \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial V^T(x, t)}{\partial x} f(x, y) + \\ \frac{1}{2} l^T(x, y) \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} l(x, y) + m^T(x, y) m(x, y) - \\ \frac{1}{4} \left[\frac{\partial V^T(x, t)}{\partial x} g(x, y) + l^T(x, y) \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} q(x, y) \right] \times \\ \left[I + \frac{1}{2} q^T(x, y) \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} q(x, y) \right]^{-1} \times \\ \left[g^T(x, y) \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} + q^T(x, y) \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} l(x, y) \right] = 0, \\ I + \frac{1}{2} q^T(x, y) \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} q(x, y) > 0. \end{cases} \quad (7)$$

则系统(6)是内部稳定的, 且最优反馈控制策略和最优性能指标分别为

$$\begin{aligned} L_{u=u^*} V(x, t) &= \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial V^T(x, t)}{\partial x} (f(x, x_\tau) + g(x, x_\tau)u^*) + \frac{1}{2} (l(x, x_\tau) + q(x, x_\tau)u^*)^T \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} (l(x, x_\tau) + q(x, x_\tau)u^*) = \\ &- m^T(x, x_\tau) m(x, x_\tau) + \frac{1}{4} \left[\frac{\partial V^T(x, t)}{\partial x} g(x, x_\tau) + l^T(x, x_\tau) \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} q(x, x_\tau) \right] \times \left[I + \frac{1}{2} q^T(x, x_\tau) \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} q(x, x_\tau) \right]^{-1} \times \\ &\left[g^T(x, x_\tau) \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} + q^T(x, x_\tau) \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} l(x, x_\tau) \right] + \left[\frac{\partial V^T(x, t)}{\partial x} g(x, x_\tau) + l^T(x, x_\tau) \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} q(x, x_\tau) \right] u^* = \\ &- m^T(x, x_\tau) m(x, x_\tau) - \frac{1}{4} \left[\frac{\partial V^T(x, t)}{\partial x} g(x, x_\tau) + l^T(x, x_\tau) \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} q(x, x_\tau) \right] \times \left[I + \frac{1}{2} q^T(x, x_\tau) \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} q(x, x_\tau) \right]^{-1} \times \\ &\left[g^T(x, x_\tau) \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} + q^T(x, x_\tau) \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} l(x, x_\tau) \right] \leq 0. \end{aligned}$$

所以, 系统(6)是依概率全局渐近稳定的, 表明 $\lim_{T \rightarrow \infty} EV(x, T) = 0$ 几乎处处成立^[14], 在式(10)中令 $T \rightarrow \infty, u = u^*$ 即得到式(9), 引理1得证.

值得注意的是, 当引理1中的时间延迟 $\tau = 0$, 即系统中不存在时滞时, 引理1的结果就退化为文献[16]中关于无限时间随机Itô系统AQR的相关结论, 因此引理1是文献[16]相关研究结果的扩展.

$$u^* = K = -\frac{1}{2} \left[I + \frac{1}{2} q^T(x, x_\tau) \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} q(x, x_\tau) \right]^{-1} \times \left[g^T(x, x_\tau) \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} + q^T(x, x_\tau) \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} l(x, x_\tau) \right], \quad (8)$$

$$J(u^*) = \inf_{u \in L^2_{\mathbb{F}}(\mathbf{R}^+; \mathbf{R}^{n_u})} E \int_0^{\infty} [\|m(x(t), x(t-\tau))\|^2 + \|u(t)\|^2] dt = V(x_0, 0). \quad (9)$$

证明 利用Itô公式和配方法得到:

$$\begin{aligned} E \int_0^T [\|m(x, x_\tau)\|^2 + \|u\|^2] dt &= \\ E \int_0^T [(m^T(x, x_\tau) m(x, x_\tau) + u^T u) dt + LV(x, t)] &+ \\ V(x_0, 0) - EV(x, T) &= E \int_0^T \left[\frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial V^T(x, t)}{\partial x} \times \right. \\ (f(x, x_\tau) + g(x, x_\tau)u) + \frac{1}{2} (l(x, x_\tau) + q(x, x_\tau)u)^T \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} \times & \\ (l(x, x_\tau) + q(x, x_\tau)u) + (m^T(x, x_\tau) m(x, x_\tau) + u^T u) \left. \right] dt + & \\ V(x_0, 0) - EV(x, T) &= E \int_0^T [(u - u^*)^T (u - u^*) + \\ \Theta(x, x_\tau, t)] dt + V(x_0, 0) - EV(x, T). \end{aligned} \quad (10)$$

其中 u^* 如式(8)所示.

由式(7)可知:

$$E \int_0^{\infty} [\|m(x, x_\tau)\|^2 + \|u\|^2] dt \leq V(x_0, 0). \quad (11)$$

综合式(6)~(8)有:

3 Nash均衡策略

在给出本文的主要结论前, 首先做出如下假设.

假设 1 对任意给定的控制输入 $u \in L^2_{\mathbb{F}}(\mathbf{R}^+; \mathbf{R}^{n_u})$, $v \in L^2_{\mathbb{F}}(\mathbf{R}^+; \mathbf{R}^{n_v})$, 系统(1)是内部稳定的.

下文借助耦合HJEs给出博弈问题(1)~(2)的Nash均衡策略的存在条件.

定理 1 针对式(1)~(2)描述的2人Nash微分博弈

问题,在假设1成立的条件下,若存在2个非负函数 $V_1(x,t), V_2(x,t) \in C^{2,1}(\mathbf{R}^n; \mathbf{R}^+)$, 使得式(12)~(15)4个耦合HJEs存在解 $(V_1, \mathbf{K}_1; V_2, \mathbf{K}_2)$:

$$\begin{cases} \Upsilon_1(x,y,t) = \frac{\partial V_1(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial V_1^T(x,t)}{\partial x} \hat{f}(x,y) + \\ \frac{1}{2} \tilde{l}^T(x,y) \frac{\partial^2 V_1(x,t)}{\partial x^2} \hat{l}(x,y) + m^T(x,y)m(x,y) - \\ \mathbf{K}_1^T(x,y) \left[\mathbf{I} + \frac{1}{2} \mathbf{q}^T(x,y) \frac{\partial^2 V_1(x,t)}{\partial x^2} \mathbf{q}(x,y) \right] \mathbf{K}_1(x,y) = 0, \\ \mathbf{I} + \frac{1}{2} \mathbf{q}^T(x,y) \frac{\partial^2 V_1(x,t)}{\partial x^2} \mathbf{q}(x,y) > 0; \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1(x,y) = & -\frac{1}{2} \left[\mathbf{I} + \frac{1}{2} \mathbf{q}^T(x,y) \frac{\partial^2 V_1(x,t)}{\partial x^2} \mathbf{q}(x,y) \right]^{-1} \times \\ & \left[\mathbf{g}^T(x,y) \frac{\partial V_1(x,t)}{\partial x} + \mathbf{q}^T(x,y) \frac{\partial^2 V_1(x,t)}{\partial x^2} \hat{l}(x,y) \right]; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{cases} \Upsilon_2(x,y,t) = \frac{\partial V_2(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial V_2^T(x,t)}{\partial x} \tilde{f}(x,y) + \\ \frac{1}{2} \tilde{l}^T(x,y) \frac{\partial^2 V_2(x,t)}{\partial x^2} \tilde{l}(x,y) + n^T(x,y)n(x,y) - \\ \mathbf{K}_2^T(x,y) \left[\mathbf{I} + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T(x,y) \frac{\partial^2 V_2(x,t)}{\partial x^2} \mathbf{s}(x,y) \right] \mathbf{K}_2(x,y) = 0, \\ \mathbf{I} + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T(x,y) \frac{\partial^2 V_2(x,t)}{\partial x^2} \mathbf{s}(x,y) > 0; \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_2(x,y) = & -\frac{1}{2} \left[\mathbf{I} + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T(x,y) \frac{\partial^2 V_2(x,t)}{\partial x^2} \mathbf{s}(x,y) \right]^{-1} \times \\ & \left[\mathbf{h}^T(x,y) \frac{\partial V_2(x,t)}{\partial x} + \mathbf{s}^T(x,y) \frac{\partial^2 V_2(x,t)}{\partial x^2} \tilde{l}(x,y) \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

其中, $\hat{f}(x,y) = f(x,y) + h(x,y)\mathbf{K}_2(x,y)$, $\hat{l}(x,y) = l(x,y) + s(x,y)\mathbf{K}_2(x,y)$, $\tilde{f}(x,y) = f(x,y) + g(x,y)\mathbf{K}_1(x,y)$, $\tilde{l}(x,y) = l(x,y) + q(x,y)\mathbf{K}_1(x,y)$, 则博弈问题(1)~(2)存在形如 $u^* = \mathbf{K}_1, v^* = \mathbf{K}_2$ 的Nash均衡解 (u^*, v^*) .

证明 由于时滞非线性随机系统的AQR可以看作是2人Nash微分博弈的退化情形,即1人微分博弈,因此定理1的证明可利用引理1加以证明. 按照Nash均衡的定义,首先给定博弈参与人2的最优策略 v^* , 证明 u^* 是博弈参与人1的最优策略. 为了应用引理1,考虑下述优化问题:

$$\begin{aligned} \inf_{u \in L^2_{\mathbf{F}}(\mathbf{R}^+; \mathbf{R}^{m_u})} J_1(u, v^*) = & E \int_0^{\infty} [\|m(x, x_\tau)\|^2 + \|u\|^2] dt, \\ \text{s.t.} & \\ dx = & [\hat{f}(x, x_\tau) + g(x, x_\tau)u] dt + [\hat{l}(x, x_\tau) + q(x, x_\tau)u] dw. \end{aligned} \quad (16)$$

根据引理1,令 $\hat{f} \Rightarrow f, \hat{l} \Rightarrow l$, 则由引理1中的 $u^* = \mathbf{K}$ 得到优化问题(16)的 $u^* = \mathbf{K}_2$, 且 $J_1(u^*, v^*) = V_1(x_0, 0)$. 类似地,给定博弈参与人1的最优策略 $u^*, v^* = \mathbf{K}_2$ 是博弈参与人2的最优策略,从而得到定理1的结论. 定理1证毕.

张维海等^[8-9]讨论非线性随机系统混合 H_2/H_∞ 控制时,也面临着求解形如式(12)~(15)的4个耦合HJEs,他们指出,求解4个耦合HJEs是非常困难的,即使是针对线性系统,目前也没有有效的求解方法. 但对某些特殊情形,却可以将4个耦合HJEs简化为2个耦合的HJEs,如当式(1)中的 $q(x, x_\tau) = s(x, x_\tau) \equiv 0$, 即仅噪声依赖状态的随机系统. 因此,针对仅噪声依赖状态的时滞非线性随机系统可以得到推论1.

推论1 针对状态方程有下式描述的博弈系统

$$\begin{cases} dx = [f(x, x_\tau) + g(x, x_\tau)u + h(x, x_\tau)v] dt + \\ l(x, x_\tau)dw(t), \quad t > 0, \\ x_t = \phi_t \in C_{\mathbf{F}_0}^b([-\tau, 0]; \mathbf{R}^n), \quad -\tau \leq t \leq 0. \end{cases} \quad (17)$$

博弈参与人1和2的性能指标仍如式(2)所示. 如果存在2个非负的函数 $V_1(x,t), V_2(x,t) \in C^{2,1}(\mathbf{R}^n; \mathbf{R}^+)$, 满足式(18)~(19)2个耦合HJEs:

$$\begin{aligned} \Phi_1(x,y,t) = & \frac{\partial V_1(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial V_1^T(x,t)}{\partial x} (f(x,y) - \\ & \frac{1}{2} h(x,y)h^T(x,y) \frac{\partial V_2(x,t)}{\partial x}) + m^T(x,y)m(x,y) + \\ & \frac{1}{2} \tilde{l}^T(x,y) \frac{\partial^2 V_1(x,t)}{\partial x^2} \tilde{l}(x,y) - \\ & \frac{1}{4} \frac{\partial V_1^T(x,t)}{\partial x} g(x,y)g^T(x,y) \frac{\partial V_1(x,t)}{\partial x} = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(x,y,t) = & \frac{\partial V_2(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial V_2^T(x,t)}{\partial x} (f(x,y) - \\ & \frac{1}{2} g(x,y)g^T(x,y) \frac{\partial V_1(x,t)}{\partial x}) + n^T(x,y)n(x,y) + \\ & \frac{1}{2} \tilde{l}^T(x,y) \frac{\partial^2 V_2(x,t)}{\partial x^2} \tilde{l}(x,y) - \\ & \frac{1}{4} \frac{\partial V_2^T(x,t)}{\partial x} h(x,y)h^T(x,y) \frac{\partial V_2(x,t)}{\partial x} = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

定义 $\mathbf{K}_1 = -\frac{1}{2} g^T(x, x_\tau) \frac{\partial V_1(x,t)}{\partial x}, \mathbf{K}_2 = -\frac{1}{2} h^T(x, x_\tau) \frac{\partial V_2(x,t)}{\partial x}$, 则该博弈问题存在形如 $u^* = \mathbf{K}_1, v^* = \mathbf{K}_2$ 的Nash均衡解 (u^*, v^*) .

推论1的证明可直接根据定理1得出,不再给出详细的证明过程. 下文针对仅噪声依赖状态的时滞非线性随机系统的2人Nash微分博弈问题,给出数值算例来演示2个耦合HJEs的求解,从而验证文中所得结论的有效性.

4 数值算例

考虑式(1)~(2)描述的博弈系统,式中各函数的取值为

$$\begin{aligned} f(x(t), x(t-\tau)) &= -\frac{1}{2}x(t)x^2(t-\tau), \\ g(x(t), x(t-\tau)) &= \frac{3}{2}\sqrt{5}x(t-\tau), \\ h(x(t), x(t-\tau)) &= \sqrt{6}x(t-\tau), l(x(t), x(t-\tau)) = x(t)x(t-\tau), \\ q(x(t), x(t-\tau)) &= s(x(t), x(t-\tau)) = 0, \\ m(x(t), x(t-\tau)) &= n(x(t), x(t-\tau)) = x(t)x(t-\tau). \end{aligned}$$

令 $V_i(x, t) = p_i x^2$, $p_i > 0$, $i = 1, 2$ 是待定的常数,则 $\frac{\partial V_i(x, t)}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial V_i(x, t)}{\partial x} = 2p_i x$, $\frac{\partial^2 V_i(x, t)}{\partial x^2} = 2p_i$, 代入到式(18)~(19)中得到

$$\begin{cases} 2p_1 x \cdot \left(-\frac{1}{2}xx_\tau^2 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6}x_\tau \cdot \sqrt{6}x_\tau \cdot 2p_2 x\right) + \\ \frac{1}{2}xx_\tau \cdot 2p_1 \cdot xx_\tau + xx_\tau \cdot xx_\tau - \frac{1}{4} \cdot 2p_1 x \cdot \\ \frac{3}{2}\sqrt{5}x_\tau \cdot \frac{3}{2}\sqrt{5}x_\tau \cdot 2p_1 x = 0, \\ 2p_2 x \cdot \left(-\frac{1}{2}xx_\tau^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{5}x_\tau \cdot \frac{3}{2}\sqrt{5}x_\tau \cdot 2p_1 x\right) + \\ \frac{1}{2}xx_\tau \cdot 2p_2 \cdot xx_\tau + xx_\tau \cdot xx_\tau - \\ \frac{1}{4} \cdot 2p_2 x \cdot \sqrt{6}x_\tau \cdot \sqrt{6}x_\tau \cdot 2p_2 x = 0. \end{cases}$$

化简上述HJEs得

$$\begin{cases} 2p_1 \cdot \left(-\frac{1}{2} - 6p_2\right) + p_1 + 1 - \frac{45}{4}p_1^2 = 0, \\ 2p_2 \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{45}{4}p_1\right) + p_2 + 1 - 6p_2^2 = 0. \end{cases}$$

解上述方程得 $p_1 = \frac{2}{9}$, $p_2 = \frac{1}{6}$, 根据推论1得博弈的Nash均衡策略为 $u^* = -\frac{1}{2}g(x, x_\tau) \frac{\partial V_1(x, t)}{\partial x} = -\frac{\sqrt{5}}{3}xx_\tau$, $v^* = -\frac{1}{2}h(x, x_\tau) \frac{\partial V_2(x, t)}{\partial x} = -\frac{\sqrt{6}}{6}xx_\tau$.

5 结论

本文研究了一类噪声依赖状态和控制的时滞非线性随机系统的Nash微分博弈问题,借助4个耦合的HJEs得到了系统Nash均衡策略存在的充分条件,并给出了Nash均衡策略的显式表达.最后,数值算例验证了文中所得结论的有效性.

本文所研究动态系统虽是噪声依赖状态和控制的一般情形,但所研究的时滞仍限定在一个给定的

有限值,且噪声为标准布朗运动情形.而时变时滞及Lévy噪声下的动态系统可以更准确地对问题进行建模和分析,因此,如何利用文中的方法,对时变时滞、Lévy噪声情形下的时滞非线性随机系统微分博弈问题展开深入研究将是未来研究的重点.

参考文献:

- [1] ENGWERDA J, MAHMOUDINIA D, DALALI I R. Government and central bank interaction under uncertainty: a differential games approach[J]. Iranian Economic Review, 2016, 20(2): 225-259.
- [2] ZHANG C, ZHU H, ZHOU H, *et al.* Non-cooperative stochastic differential game theory of generalized markov jump linear systems[M]. Switzerland: Springer, 2017.
- [3] ZHU K, NIYATO D, WANG P, *et al.* Dynamic spectrum leasing and service selection in spectrum secondary market of cognitive radio networks[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2012, 11(3): 1136-1145.
- [4] ZHU Q, BASER T. Multi-resolution large population stochastic differential games and their application to demand response management in the smart grid[J]. Journal of Dynamic Games and Applications, 2013, 3(1): 68-88.
- [5] SAGARA M, MUKAIDANI H, UNNO M, *et al.* Nonlinear Stochastic Dynamic Games[C]//5th International Symposium on Advanced Control of Industrial Processes, May 28-30, 2014, Hiroshima, Japan. [S.l.]: IEEE, 2014: 79-84.
- [6] MUKAIDANI H, XU H, DRAGAN V, *et al.* Finite-horizon dynamic games for a class of nonlinear stochastic systems[C]//54th Annual Conference on Decision and Control, December 15-18, 2015. Japan, Osaka: IEEE, 2015: 519-524.
- [7] 丘志鸿, 翁瀚, 张成科. 基于T-S模糊建模思想的一类双人非线性非合作微分博弈的Nash均衡解[J]. 广东工业大学学报, 2011, 28(1): 68-72.
- QIU Z H, WENG H, ZHANG C K. Nash equilibrium solution to a class of two-player non-cooperative differential games based on the thought of T-S fuzzy modeling[J]. Journal of Guangdong University of Technology, 2011, 28(1): 68-72.
- [8] ZHANG W, ZHANG H, CHEN B S. Stochastic H_2/H_∞ control with (x, u, v) -dependent noise: Finite horizon case[J]. Automatica, 2006, 42(11): 1891-1898.
- [9] ZHANG W, FENG G. Nonlinear stochastic H_2/H_∞ control with (x, u, v) -dependent noise: infinite horizon case[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2008, 53(5): 1323-1328.
- [10] MUKAIDANI H. Dynamic games for stochastic systems with delay[J]. Asian Journal of Control, 2014, 16(1): 1-10.

(下转第60页)