doi: 10.12052/gdutxb.170175

跳跃扩散下美式期权定价模型的高效算法

杨淑伶

（广东工业大学　应用数学学院，广东　广州 510090）

摘要: 研究跳跃扩散模型下美式期权定价问题的高效数值求解方法. 首先在空间方向上利用高精度紧致差分格式离散期权定价模型, 再对离散后所得到的常微分方程时间离散转化为线性互补问题. 对线性互补问题的计算可求得期权价格的数值近似解. 最后为了克服初始条件的不光滑性, 对美式期权定价模型运用了奇异性分离的方法以提高计算结果的精度. 数值实例验证了本文所建立算法的优越性.

关键词: 美式期权；高精度紧致差分格式；奇异性分离

中图分类号: O241.8　　**文献标志码:** A　　**文章编号:** 1007–7162(2018)03–0087–03

An Efficient Algorithm for American Option Pricing in the Jump-Diffusion Model

Yang Shu-ling

(School of Applied Mathematics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510090, China)

Abstract: The efficient numerical methods for solving the American option pricing model under jump-diffusion is studied. First of all, the high accuracy compact difference scheme is applied to discrete the option pricing model in the spatial direction, and discrete the temporal variable of the resulting ordinary differential equation to the linear complementarity problem (LCP). The approximation value of option price is obtained by solving the LCP. Finally, in order to overcome the nonsmoothness of payoff function, the singularity separating method is utilized for the American option pricing model to improve the accuracy of calculation. Numerical examples demonstrate the superiority of the algorithm.

Key words: American option; high accuracy compact difference scheme; singularity separating method

期权定价理论是现代金融学研究体系中的重要组成部分. 期权赋予持有人在规定时间内以事先约定的价格买入（看涨期权）或卖出（看跌期权）某种标的资产的权利. 根据持有人行使权利的时间规定不同，期权可分为欧式期权和美式期权. 欧式期权只能在到期日被执行，但美式期权可以在到期日之前的任何时刻被执行，因而其定价问题更为复杂. 目前世界各地的期权交易所交易的期权大部分是属于美式期权类型，所以美式期权定价问题的研究具有更重要的实际应用意义.

不同于Black-Scholes模型[1]，跳跃扩散期权定价模型[2-3]中假设标的资产价格的变动除了服从随机布朗运动外，还加入了随机跳跃过程，因而其能更好地模拟实际金融市场中的价格变动情况. 本文将研究Merton跳跃扩散模型下美式期权定价问题的求解. 美式期权定价问题的求解有2种常用方法：（1）基于二叉树或三叉树模型计算[4-5]；（2）利用Ito引理，将跳跃扩散期权定价模型的计算转化为求解一个偏微分积分方程(PIDE)[6-8]. 由于美式期权具有可提前执行的特点，其相应的跳跃扩散模型则是1个带有自由边界的偏微分积分方程. 该方程并不存在解析解，所以对其数值解法的研究是非常必要的.

目前已有的美式期权定价偏微分积分模型的计算通常采用2阶精度的Crank-Nicolson差分格式离散方程. 该差分格式虽然稳定性较高，但精度较低[9-10]. 本文作者在文献[11]中建立了1个4阶精度紧致差分格式计算跳跃扩散下欧式期权和双障碍期权定价模型. 本文将进一步将该高精度紧致差分格式推广至求解美式期权定价模型，以建立起美式期权定价问题求解的高效算法.

收稿日期: 2017-12-20

作者简介: 杨淑伶(1976–)，女，讲师，硕士，主要研究方向为微分方程数值计算. E-mail: t_ysl@163.com

1 期权定价模型和差分格式

在跳跃扩散过程下，欧式期权价格$u(x,t)$满足如下的偏微分积分方程：

$$u_t = \mathcal{L}u = \frac{\sigma^2}{2}u_{xx} + \left(r - \lambda\kappa - \frac{\sigma^2}{2}\right)u_x - (r+\lambda) + \lambda\int_{-\infty}^{+\infty} u(x+y,t) f(y)\,\mathrm{d}y. \tag{1}$$

其中$x = \ln(S/K)$，S是标的资产的价格，K是敲入价格，$t\in[0,T]$是距离到期日T的时间，$\sigma>0$是标的资产回报率方差，$r\geqslant 0$是无风险利率，$\lambda>0$是泊松过程的平均到达率，κ是跳跃过程脉冲函数的期望值，函数$f(y)$是跳跃强度大小的密度函数. 本文考虑Merton模型，即假设跳跃强度服从均值为$\mu_{\rm M}$和方差为$\sigma_{\rm M}$的正态分布，则

$$f(y) = \frac{\mathrm{e}^{-(y-\mu_{\rm M})^2/2\sigma_{\rm M}^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\rm M}}, \tag{2}$$

并设：$\kappa = \mathrm{e}^{\left(\mu_{\rm M}+\sigma_{\rm M}^2/2\right)} - 1$.

由于美式期权可提前执行的特点，其价格$u(x,t)$满足如下的模型：

$$\begin{cases} (u_t - \mathcal{L}u) \geqslant 0, & t\in(0,T],\ x\in\mathbf{R}, \\ u \geqslant \phi, & t\in(0,T],\ x\in\mathbf{R}, \\ (u_t-\mathcal{L}u)(u-\phi) = 0, & t\in(0,T],\ x\in\mathbf{R}. \end{cases} \tag{3}$$

初始条件（以看跌期权为例）为

$$u(x,0) = \phi(x) = \max\{K(1-\mathrm{e}^x), 0\},\quad x\in\mathbf{R}. \tag{4}$$

边界条件为

$$u(x,t) \approx \begin{cases} K(\mathrm{e}^{-rt} - \mathrm{e}^x), & x\to-\infty, \\ 0, & x\to+\infty. \end{cases} \tag{5}$$

为了求得期权价格的数值解，首先将无界积分区域$\mathbf{R}$截断为有限区域$[x_{\min}, x_{\max}]$，采用常数步长$h = (x_{\max}-x_{\min})/m$将有限区域等分为$m$份，$x_i = x_{\min} + ih, i = 0,1,\cdots,m$. 设$u_i(t)$表示$u(x_i,t)$的近似值，$uf_i(t)$表示方程(1)中的积分在$x = x_i$处的近似值，对方程(1)应用Spotz高精度紧致差分格式[11-12]可得到如下的三点差分格式：

$$\sum_{j=-1}^{1} p_{j+2}\left[u'_{i+j}(t) - \lambda uf_{i+j}(t)\right] = \sum_{j=-1}^{1} q_{j+2}\cdot u_{i+j}(t) + O\left(h^4\right), \tag{6}$$

其中：

$$a_1 = \frac{\sigma^2}{2},\quad a_2 = r-\lambda\kappa-a_1,\quad a_3 = r+\lambda,$$

$$p_1 = \frac{1}{12} - \frac{a_2h}{24a_1},\quad p_2 = \frac{5}{6},\quad p_3 = \frac{1}{12} + \frac{a_2h}{24a_1},$$

$$q_1 = \frac{a_2^2}{12a_1} + \frac{a_1}{h^2} - \frac{a_2}{2h} - a_3p_1,$$

$$q_2 = -\frac{a_2^2}{6a_1} - \frac{2a_1}{h^2} - \frac{5a_3}{6},$$

$$q_3 = \frac{a_2^2}{12a_1} + \frac{a_1}{h^2} + \frac{a_2}{2h} - a_3p_3.$$

对积分$uf_i(t)$的处理如下：积分区域$\mathbf{R}$可分为有界区域$\Omega = [x_{\min}, x_{\max}]$和有界区域外$\bar{\Omega}$两部分，在$\Omega$上的定积分可用复合Simpson公式计算，误差为$O\left(h^4\right)$，而在$\bar{\Omega}$上的积分应用边界条件(5)可计算得出解析式.

除去式(6)中的误差项$O\left(h^4\right)$后，应用到方程(3)上可得到如下半离散形式

$$[\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{c}(t)]' \geqslant \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{d}(t), \tag{7}$$

其中$\boldsymbol{u}(t) = [u_1(t), u_2(t), \cdots, u_{m-1}(t)]^{\rm T}$，$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$是$m$-1阶矩阵，$\boldsymbol{c}(t)$和$\boldsymbol{d}(t)$是维数为$m$-1的向量[11].

将时间区间[0, T]分割为：$t_k = k\tau, \tau = T/n$, $k = 0,1,\cdots,n$.令$\boldsymbol{u}(t_k)$的近似值为$\boldsymbol{u}^k$，采用梯形法公式离散式(7)得如下的线性互补问题(LCP)：

$$\begin{cases} \left(B - \frac{\tau}{2}A\right)\boldsymbol{u}^k \geqslant \left(B + \frac{\tau}{2}A\right)\boldsymbol{u}^{k-1} + \frac{\tau}{2}\left(\boldsymbol{d}^k + \boldsymbol{d}^{k-1}\right) + \left(\boldsymbol{c}^{k-1} - \boldsymbol{c}^k\right), \\ u^k \geqslant \phi, \qquad k = 1,2,\cdots,n. \end{cases} \tag{8}$$

以上2个不等式至少1个取等号. 对上述线性互补问题式(8)可应用经典的PSOR解法[13]或者算子分裂法[14]等方法求解.

2 奇异性分离

虽然理论证明表示，Spotz差分格式是4阶精度的紧致差分格式，但由于期权定价模型的初始条件(4)具有不光滑性，故在实际计算中应用该格式求解期权定价模型并未能达到4阶精度.

为了解决这个问题，在文献[11]中作者采用了在不光滑点局部加密网格的方法，使计算精度恢复到4阶. 本文研究的是美式期权定价模型，考虑到相应的欧式期权定价模型存在解析公式且2个模型的初始条件相同，故可采用奇异性分离[15-16]来克服初始条件的不光滑性，同时避免了复杂的局部网格加密算法.

令$\boldsymbol{u}_{\rm D}^k = \boldsymbol{u}^k - \boldsymbol{u}_{\rm E}^k$，其中$\boldsymbol{u}_{\rm E}^k$是在$t = k\tau$处欧式期权的价格，则$\boldsymbol{u}_{\rm D}^k$可由以下线性互补问题计算得出：

$$\begin{cases} \left(B-\frac{\tau}{2}A\right)\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}^{k} \geqslant \left(B+\frac{\tau}{2}A\right)\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}^{k-1}+\frac{\tau}{2}\left(\boldsymbol{d}^{k}+\boldsymbol{d}^{k-1}\right)+\left(\boldsymbol{c}^{k-1}-\boldsymbol{c}^{k}\right), \\ \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}^{k} \geqslant \phi-\boldsymbol{u}_{\mathrm{E}}^{k}, \qquad k=1,2,\cdots,n. \end{cases} \tag{9}$$

从式(9)中求得$\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}^{n}$后，可进一步由$\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}^{n}+\boldsymbol{u}_{\mathrm{E}}^{n}$算出美式期权在$t=T$时刻的价格$\boldsymbol{u}^{n}$.

3　数值试验

本节将比较本文所提出的高精度紧致差分格式与经典的Crank-Nicolson算法在求解跳跃扩散下美式期权定价模型下的差异.

各参数设定如下：$T=0.25, \sigma=0.15, r=0.05, \lambda=0.1, \mu_{\mathrm{M}}=-0.9, \sigma_{\mathrm{M}}=0.45, x_{\min}=-2, x_{\max}=2$. 表1中，“CN”表示采用Crank-Nicolson差分格式，“SSHOC”表示采用了奇异性分离处理后使用高精度紧致差分格式. 采用算子分裂法求解线性互补问题式(9). V_0是在$S=K$处的美式期权价格数值解，“error”是V_0和精确值之间的误差. 注意到美式期权价格并不存在解析公式，故以在最密的网格上，应用高精度紧致差分格式和PSOR方法求得的计算结果作为精确解.

表 1　高精度紧致差分格式和Crank-Nicolson差分格式比较

Tab.1　The comparison between high accuracy compact difference scheme and Crank-Nicolson difference scheme

m	n	CN		SSHOC	
		V_0	error	V_0	error
32	10	2.123	$1.118e^{0}$	3.217	$2.397e^{-2}$
64	20	2.907	$3.342e^{-1}$	3.227	$1.404e^{-2}$
128	40	3.164	$7.692e^{-2}$	3.237	$4.423e^{-3}$
256	80	3.221	$2.014e^{-2}$	3.239	$2.082e^{-3}$
512	160	3.236	$5.528e^{-3}$	3.240	$8.766e^{-4}$
1 024	320	3.240	$1.599e^{-3}$	3.241	$3.738e^{-4}$

从表1可看出，由于美式期权自由边界的影响，高精度紧致差分格式计算美式期权达不到其应用在计算欧式期权时所具有的4阶精度[11]. 但是在同一网格分布上，采用本文所提出的带奇异性分离技术的高精度紧致差分格式计算美式期权价格，比经典Crank-Nicolson差分格式能获得更高精度的近似计算解. 这一点在较粗网格上尤其显著. 在最粗的网格上，使用Crank-Nicolson格式计算的结果和精确解误差较大，但使用本文的高精度格式所计算的解和精确解误差非常小. 特别需要指出的是，由于本文所采用的高精度格式是紧致差分格式，即差分格式是建立在相邻的3个点上，所以其在计算量和计算时间上与Crank-Nicolson差分格式是相仿的. 综上可得出，采用本文所提出的奇异性分离和高精度紧致差分格式相结合的算法，能快速有效地获得Merton跳跃扩散模型下美式期权价格的数值解.

4　结论

本文建立了美式期权定价Merton模型的高精度数值求解方法. 对模型采用奇异性分离方法后，再利用Spotz高精度紧致差分格式和算子分裂法相结合求得模型的近似解. 从具体实例的计算结果可得出，本文所建立的方法与经典的Crank-Nicolson差分格式相比较，在不增加计算量的同时可以显著提高计算精度.

参考文献：

[1] BLACK F, SCHOLES M. The pricing of options and corporate liabilities [J]. Journal of Political Economy, 1973, 81: 637-659.

[2] MERTON R. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous [J]. Journal of Finance Economics, 1976, 3: 125-144.

[3] KOU S G. A jump-diffusion model for option pricing [J]. Management Science, 2002, 48(8): 1086-1101.

[4] 梁进. 具有跳扩散的美式期权二叉树计算格式的收敛速率[J]. 高等学校计算数学学报, 2008, 30(1): 76-96.
LIANG J. On the convergence rate of the binomial tree scheme for an American option with jump-diffusion [J]. Numerical Mathematics A Journal of Chinese Universities, 2008, 30(1): 76-96.

[5] 何颖俞. 美式期权的三叉树定价模型[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2008, 25(1): 81-84.
HE Y Y. A trinomial tree methods for princing American options [J]. Journal of Natural Science of Heilongjiang University, 2008, 25(1): 81-84.

[6] ALMENDRAL A, OOSTERLEE C. Numerical valuation of options with jumps in the underlying [J]. Applied Numerical Mathematics, 2005, 53(1): 1-18.

[7] HALLUIN Y, FORSYTH P, VETZAL K. Robust numerical methods for contingent claims under jump diffusion processes [J]. IMA Journal of Numerical Analysis, 2005, 25: 87-112.

[8] FENG L, LINETSKY V. Pricing options in jump-diffusion models: an extrapolation approach [J]. Journal of the Operations Research Society of America, 2008, 56(2): 304-325.

[9] 钟坚敏, 柴昱洲, 孔繁博,等. 美式看跌期权定价问题的有限差分直接法[J]. 重庆理工大学学报, 2011, 25(11): 106-110.
ZHONG J M, CHAI Y Z, KONG F B, *et al*. Finite difference direct method for American put option [J]. Journal of Chongqing Universityof Technology, 2011, 25(11): 106-110.

(下转第112页)