

doi: 10.12052/gdutxb.200172

基于绝对节点坐标法的三维柔性旋转梁 动力特性分析

张海波, 夏鸿建, 李德源, 刘佳宇

(广东工业大学 机电工程学院, 广东 广州 510006)

摘要: 主要研究了三维柔性旋转梁的动力特性。采用绝对节点坐标法和几何非线性变形假设, 基于一般连续介质理论, 建立三维柔性梁的非线性动力学模型; 基于摄动理论, 结合浮点坐标方法, 采用线性化技术, 建立柔性旋转梁的振动频域分析模型。对柔性梁自由单摆进行时域仿真, 并分析了不同转速下三维柔性旋转梁的频域特性。结果表明, 随着转速增加梁的动力刚化现象明显, 且垂直旋转平面的模态振型和扭转、拉伸振型所对应的频率会逐渐转化为低阶频率, 从而影响柔性梁的振动特性。

关键词: 绝对节点坐标法; 动力学方程; 连续介质理论; 模态振型; 三维柔性梁

中图分类号: O313

文献标志码: A

文章编号: 1007-7162(2022)02-0076-08

A Dynamic Characteristics Analysis of 3D Flexible Rotating Beam Based on Absolute Node Coordinate Formulation

Zhang Hai-bo, Xia Hong-jian, Li De-yuan, Liu Jia-yu

(School of Electromechanical Engineering, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006, China)

Abstract: The dynamic characteristics of a three-dimensional(3D) flexible rotating beam is studied. Using the absolute node coordinate formulation and geometric nonlinear deformation hypothesis, the nonlinear dynamic model of 3D flexible beam is established based on the general continuum theory. Based on the perturbation theory and the floating-point coordinate method, the vibration frequency domain analysis model of the rotating flexible beam is established by using the linearization technique. Then, the time domain simulation of the free single pendulum of the flexible beam is carried out, and the frequency domain characteristics of the 3D flexible rotating beam at different speeds are analyzed. The results show that as the rotation speed increases, its dynamic stiffening phenomenon is obvious, and the frequency corresponding to the mode shape of the vertical rotation plane and the torsional and tensile modes will gradually be transformed into low-order frequencies, thereby affecting the vibration characteristics of the flexible beam.

Key words: absolute node coordinate formulation; dynamic equation; continuum theory; modal shape; three-dimensional flexible beam

随着柔性梁在航空、航天和风力机等领域的广泛应用, 研究者越来越重视其高精度的动力特性分析。如直升机螺旋桨^[1]、风力发电机叶片^[2]等, 这类梁结构具有明显的非线性变形特点, 工作时存在不同的回转速度。精确控制柔性旋转梁, 需准确分析柔性梁的时域和频域特性。工程中为提高分析效率, 通常

采用简化梁模型, 主要有线性有限元法、模态坐标近似法和柔性多体系统法, 但这些方法存在模型精度较低、动力刚化模拟不明显、转动模态仿真不准确等问题。直接采用有限元模型, 虽然能精确描述梁结构, 但由于自由度显著增加, 难以将其用于后续的多场耦合分析。现在计算大转动、非线性大变形的动

收稿日期: 2020-12-21

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51776044); 广东省自然科学基金资助项目(2020A1515010844)

作者简介: 张海波(1993-), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为绝对节点坐标方法的运用

通信作者: 夏鸿建(1978-), 男, 副教授, 主要研究方向为风力机气动与结构, E-mail: hjxia@gdut.edu.cn

力学问题的主流方法有GEBF(Geometrically Exact Beam Formula)和ANCF(Absolute Node Coordinate Formula)^[3]。前者在机翼气弹耦合分析领域得到广泛应用,但存在梁截面姿态插值问题,且广义坐标包含角度和位移,给频域分析的线性化处理带来较大困难。绝对节点坐标法由于质量矩阵为常数矩阵,且直接基于连续介质理论,能方便描述梁的几何非线性特征,并支持高效的时域求解。此外,在构建频域线性化动力学方程时,仅需对刚度矩阵线性化,因此适用于柔性旋转梁模型的时域和频域分析建模。目前,国内外已有专家开展了广泛研究。

Ahmed^[4]介绍了绝对节点坐标公式的计算机实现过程,为后续的数值仿真奠定了基础。Zhang等^[5-6]使用不同插值函数的ANCF对平面梁进行了动力特性分析,研究了弯曲和拉伸振动之间的模态耦合现象,但缺少弯扭耦合的相关研究。郑彤等^[7]对三维大变形柔性梁系统的动力学建模和仿真进行了研究。建立三维大变形柔性梁系统的动力学模型,解决了ADAMS在计算大变形物体动力学时的局限性,但并未涉及动力特性分析。赵春璋等^[8-12]建立动力学模型,研究了平面柔性梁大范围转动的变形、仿真精度的影响以及不同梁的理论适用范围,但未对频域响应进行相关的研究。姚震等^[13-14]对ANCF的精确性和灵敏度展开了研究,认为不同材料和截面特征对系统末端的运动规律有一定影响,同样未涉及动力特性分析方面的工作。

综上,目前研究主要集中于平面梁的动力学仿真和弯曲梁小变形情况下固有频率的计算,对基于连续介质理论和非线性变形假设的三维柔性旋转梁动力刚化及其动力特性的研究相对较少。

为此,本文基于绝对节点坐标法,结合连续介质理论和几何非线性假设,建立三维柔性梁的动力学模型。通过非线性梁自由单摆仿真实验,验证本文算法的精确性;然后对三维梁的动力学方程进行线性化,构建柔性旋转梁的频域振动方程,计算不同转速下梁的动力刚化现象,并研究柔性旋转梁在不同转速下的模态振型变化。为后续风力机或飞机叶片等的气弹阻尼分析提供指导。

1 绝对节点坐标柔性梁建模

1.1 梁单元位置插值

图1为三维二节点梁单元。其中, $OXYZ$ 为绝对坐标系, (x,y,z) 为梁单元中任意一节点在单元坐标系中的坐标。 r^p 为梁单元中线上任意一点 p 在绝对坐标系中的

位置矢量; r_1, r_2, r_3, X, Y, Z 为该点三维坐标参数; $e(t)$ 为绝对坐标系中的单元节点坐标; $S(x,y,z)$ 为单元形函数。

$$r^p = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = S(x,y,z)e(t) \quad (1)$$

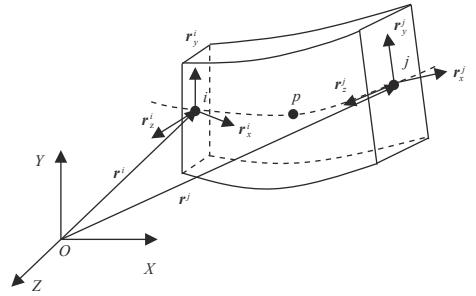


图1 三维变形梁单元

Fig.1 Three dimensional deformed beam element

本文采用三次插值多项式来描述单元中任意一点的绝对位置。

$$\begin{cases} r_1 = a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + a_4xy + a_5xz + a_6x^2 + a_7x^3 \\ r_2 = b_0 + b_1x + b_2y + b_3z + b_4xy + b_5xz + b_6x^2 + b_7x^3 \\ r_3 = c_0 + c_1x + c_2y + c_3z + c_4xy + c_5xz + c_6x^2 + c_7x^3 \end{cases}$$

式中: a_i, b_i, c_i 为待定系数, x, y, z 为梁单元未变形时该点在单元坐标系下的坐标。

$$e(t) = [e_i \ e_j]^T = [r^i \ r_x^i \ r_y^i \ r_z^i \ r^j \ r_x^j \ r_y^j \ r_z^j]^T \quad (2)$$

式中: r^i, r^j 分别表示单元首尾节点在 $OXYZ$ 下的位置矢量; r_x 表示位置矢量对梁单元坐标 x 的偏导数矢量, r_y, r_z 同理。

将单元坐标式(2)与三次插值多项式联立,求解待定系数,可得到单元形函数^[15]。

$$S(x,y,z) = [S_1I \ S_2I \ S_3I \ S_4I \ S_5I \ S_6I \ S_7I \ S_8I] \quad (3)$$

式中: I 为 3×3 的单位矩阵。

$$\begin{cases} S_1 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3; & S_2 = l(\xi - 2\xi^2 + \xi^3); \\ S_3 = l(\eta - \xi\eta); & S_4 = l(\zeta - \xi\zeta); \\ S_5 = 3\xi^2 - 2\xi^3; & S_6 = l(\xi^3 - \xi^2); \\ S_7 = l(\xi\eta); & S_8 = l(\xi\zeta) \end{cases}$$

式中: $\xi = x/l, \eta = y/l, \zeta = z/l, l$ 为未变形时梁的单元长度。

1.2 单元质量矩阵

对式(1)进行时间求导可得到任意一点的绝对速度 \dot{r} 。

$$\dot{r} = S\dot{e} \quad (4)$$

梁单元的动能可表示为

$$E_k = \frac{1}{2} \rho \iiint \dot{\boldsymbol{r}}^T \dot{\boldsymbol{r}} dV = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{e}}^T \left(\rho \iiint \boldsymbol{S}^T \boldsymbol{S} dV \right) \dot{\boldsymbol{e}} = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{e}}^T \boldsymbol{M} \dot{\boldsymbol{e}} \quad (5)$$

式中： \boldsymbol{M} 为单元质量矩阵，该矩阵与广义坐标无关，为常数矩阵。

$$\boldsymbol{M} = \rho \int_0^l \left(\iint \boldsymbol{S}^T \boldsymbol{S} dA \right) dx \quad (6)$$

式中： ρ 、 dA 、 l 分别为梁单元的密度、截面面积微元、梁未变形时的单元长度。

1.3 单元刚度矩阵

利用连续介质理论和非线性格林应变张量假设，计算梁单元的位移应变关系。梁单元的变形梯度 \boldsymbol{H} 为

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial x} & \frac{\partial r_1}{\partial y} & \frac{\partial r_1}{\partial z} \\ \frac{\partial r_2}{\partial x} & \frac{\partial r_2}{\partial y} & \frac{\partial r_2}{\partial z} \\ \frac{\partial r_3}{\partial x} & \frac{\partial r_3}{\partial y} & \frac{\partial r_3}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (7)$$

非线性格林应变张量为

$$\boldsymbol{G} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{H}^T \boldsymbol{H} - \boldsymbol{I}) \quad (8)$$

将式(1)和式(7)代入式(8)得到

$$\boldsymbol{G} = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{S}_x \boldsymbol{e} & \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{S}_{xy} \boldsymbol{e} & \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{S}_{zx} \boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{S}_{xy} \boldsymbol{e} & \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{S}_y \boldsymbol{e} & \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{S}_{yz} \boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{S}_{zx} \boldsymbol{e} & \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{S}_{yz} \boldsymbol{e} & \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{S}_z \boldsymbol{e} \end{bmatrix} - \boldsymbol{I} \right) \quad (9)$$

式中：

$$\begin{cases} S_x = \left(\frac{\partial \boldsymbol{S}_1}{\partial x} \right)^T \frac{\partial \boldsymbol{S}_1}{\partial x} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{S}_2}{\partial x} \right)^T \frac{\partial \boldsymbol{S}_2}{\partial x} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{S}_3}{\partial x} \right)^T \frac{\partial \boldsymbol{S}_3}{\partial x} \\ S_y = \left(\frac{\partial \boldsymbol{S}_1}{\partial y} \right)^T \frac{\partial \boldsymbol{S}_1}{\partial y} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{S}_2}{\partial y} \right)^T \frac{\partial \boldsymbol{S}_2}{\partial y} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{S}_3}{\partial y} \right)^T \frac{\partial \boldsymbol{S}_3}{\partial y} \\ S_z = \left(\frac{\partial \boldsymbol{S}_1}{\partial z} \right)^T \frac{\partial \boldsymbol{S}_1}{\partial z} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{S}_2}{\partial z} \right)^T \frac{\partial \boldsymbol{S}_2}{\partial z} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{S}_3}{\partial z} \right)^T \frac{\partial \boldsymbol{S}_3}{\partial z} \\ S_{xy} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{S}_1}{\partial x} \right)^T \frac{\partial \boldsymbol{S}_1}{\partial y} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{S}_2}{\partial x} \right)^T \frac{\partial \boldsymbol{S}_2}{\partial y} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{S}_3}{\partial x} \right)^T \frac{\partial \boldsymbol{S}_3}{\partial y} \\ S_{yz} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{S}_1}{\partial y} \right)^T \frac{\partial \boldsymbol{S}_1}{\partial z} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{S}_2}{\partial y} \right)^T \frac{\partial \boldsymbol{S}_2}{\partial z} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{S}_3}{\partial y} \right)^T \frac{\partial \boldsymbol{S}_3}{\partial z} \\ S_{zx} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{S}_1}{\partial z} \right)^T \frac{\partial \boldsymbol{S}_1}{\partial x} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{S}_2}{\partial z} \right)^T \frac{\partial \boldsymbol{S}_2}{\partial x} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{S}_3}{\partial z} \right)^T \frac{\partial \boldsymbol{S}_3}{\partial x} \end{cases}$$

将对称的非线性格林应变张量表示为列矢量形式。

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\boldsymbol{G}_{11} \quad \boldsymbol{G}_{22} \quad \boldsymbol{G}_{33} \quad 2\boldsymbol{G}_{12} \quad 2\boldsymbol{G}_{13} \quad 2\boldsymbol{G}_{23}]^T \quad (10)$$

在线弹性本构关系下，应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 与应变 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的关系为

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (11)$$

式中： \boldsymbol{D} 为材料弹性系数张量。

根据虚功原理弹性力所作虚功为

$$\delta V_w = \int_V (\boldsymbol{D} \boldsymbol{\varepsilon})^T \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV = \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{K} \delta \boldsymbol{e} \quad (12)$$

式中： \boldsymbol{K} 为单元刚度矩阵， V 为梁单元的体积，可将单元刚度矩阵整理得到式(13)。

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_1 + \boldsymbol{K}_n \quad (13)$$

式中： \boldsymbol{K}_1 为刚度矩阵的线性部分，与绝对节点坐标无关。

$$\boldsymbol{K}_1 = -\frac{(3\lambda + 2\mu)}{2} \iiint (\boldsymbol{S}_x + \boldsymbol{S}_y + \boldsymbol{S}_z) dV \quad (14)$$

\boldsymbol{K}_n 为非线性部分， $\boldsymbol{K}_n = \boldsymbol{K}_{n,1} + \boldsymbol{K}_{n,2} + \boldsymbol{K}_{n,3}$ ，其中 λ 、 μ 为lame常数，具体计算为

$$\begin{cases} \boldsymbol{K}_{n,1} = \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu) \iiint ((\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{S}_x \boldsymbol{e}) \boldsymbol{S}_x + (\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{S}_y \boldsymbol{e}) \boldsymbol{S}_y + (\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{S}_z \boldsymbol{e}) \boldsymbol{S}_z) dV \\ \boldsymbol{K}_{n,2} = \frac{1}{2} \lambda \iiint ((\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{S}_x \boldsymbol{e}) (\boldsymbol{S}_y + \boldsymbol{S}_z) + (\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{S}_y \boldsymbol{e}) (\boldsymbol{S}_x + \boldsymbol{S}_z) + (\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{S}_z \boldsymbol{e}) (\boldsymbol{S}_x + \boldsymbol{S}_y)) dV \\ \boldsymbol{K}_{n,3} = \mu \iiint ((\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{S}_{xy} \boldsymbol{e}) (\boldsymbol{S}_{xy} + \boldsymbol{S}_{xy}^T) + (\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{S}_{yz} \boldsymbol{e}) (\boldsymbol{S}_{yz} + \boldsymbol{S}_{yz}^T) + (\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{S}_{zx} \boldsymbol{e}) (\boldsymbol{S}_{zx} + \boldsymbol{S}_{zx}^T)) dV \end{cases} \quad (15)$$

$$\lambda = \frac{\nu}{1+\nu} \cdot \frac{E}{1-2\nu}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

式(15)中： E 为材料的弹性模量， ν 为材料泊松比。

1.4 单元广义力矩阵

根据虚功原理以及式(1)，得到外力虚功为

$$\delta W_{ele} = \boldsymbol{F}^T \delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{F}^T \boldsymbol{S} \delta \boldsymbol{e} = \boldsymbol{Q}_{ele}^T \delta \boldsymbol{e} \quad (16)$$

式中： \boldsymbol{r} 是节点的位置矢量， \boldsymbol{F} 为梁单元上任意一点所受的外力， \boldsymbol{Q}_{ele}^T 是与单元节点坐标相关的广义力的矢量。

$$\boldsymbol{Q}_{ele}^T = \boldsymbol{F}^T \boldsymbol{S} \quad (17)$$

2 柔性梁系统动力学方程

2.1 系统的约束表达

单摆仿真时，需要在单摆被约束的根部施加一转动副约束，使单摆绕着被约束点旋转，此外该转动副亦可施加于梁与梁之间，形成两梁之间的相对转动；多个梁单元时，单元与单元之间不会发生相对移动、扭转和旋转，单元与单元需固结在一起。故本文特介绍2种约束，一种为绕 z 轴旋转的自由单摆的转动副约束，一种为梁单元之间的固定铰约束。

转动副约束定义如图2(a)所示，点 p 是两单元连接处的节点，故两单元在点 p 处的绝对位置坐标和

z 方向的偏导坐标始终相同, x 和 y 方向的偏导坐标可以不同。其约束方程为

$$\mathbf{r}^{ip} = \mathbf{r}^{jp} \quad (18)$$

$$\mathbf{r}_z^{ip} = \mathbf{r}_z^{jp} \quad (19)$$

固定铰约束如图2(b)所示,点 p 在 i 单元和 j 单元中的绝对位置坐标和偏导坐标始终相等。其约束方程为

$$\mathbf{r}^{ip} = \mathbf{r}^{jp}; \quad \mathbf{r}_\alpha^{ip} = \mathbf{r}_\alpha^{jp}, \quad \alpha = x, y, z \quad (20)$$

式中: \mathbf{r}^{ip} 为 i 单元中 p 点的绝对坐标矢量, \mathbf{r}_α^{ip} 为 i 单元中 p 点关于单元坐标的偏导数。

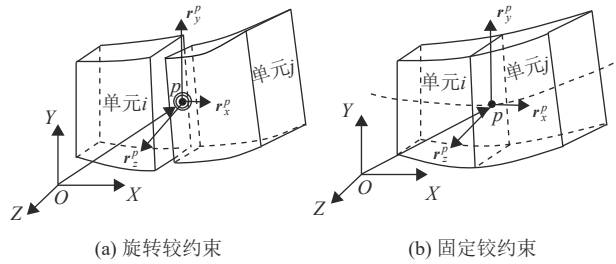


图2 系统约束

Fig.2 System constraints

2.2 系统动力学方程

由单元质量矩阵、单元刚度矩阵、单元广义力矩阵和组装布尔矩阵 \mathbf{B} ,可获得梁模型的质量矩阵 \mathbf{M}_{tm} 、刚度矩阵 \mathbf{K}_{tm} 、广义力矩阵 \mathbf{Q}_{tm} 。

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{tm} = \mathbf{B}^T \mathbf{M} \mathbf{B} \\ \mathbf{K}_{tm} = \mathbf{B}^T \mathbf{K} \mathbf{B} \\ \mathbf{Q}_{tm} = \mathbf{B}^T \mathbf{Q}_{ele} \end{cases} \quad (21)$$

\mathbf{B} 是 $m \times n$ 维的组装布尔矩阵, m 为梁单元坐标数与单元数目的乘积, n 为柔性梁系统节点坐标数^[16]。

考虑梁铰约束,将约束式(18)~(20)与式(21)联立。约束组装矩阵由 \mathbf{B}_c 表示, $\ddot{\mathbf{e}}$ 为加速度,约束柔性梁的动力学方程可表示为

$$\mathbf{M}_c (\mathbf{B}_c \ddot{\mathbf{e}}) + \mathbf{K}_c (\mathbf{B}_c \mathbf{e}) = \mathbf{Q}_c \quad (22)$$

式中: \mathbf{M}_c 为约束后的质量矩阵, \mathbf{K}_c 为约束后的刚度矩阵, \mathbf{Q}_c 为约束后的广义力矩阵。

$$\begin{cases} \mathbf{M}_c = \mathbf{B}_c^T \mathbf{M}_{tm} \mathbf{B}_c \\ \mathbf{K}_c = \mathbf{B}_c^T \mathbf{K}_{tm} \mathbf{B}_c \\ \mathbf{Q}_c = \mathbf{B}_c \mathbf{Q}_{tm} \end{cases}$$

2.3 旋转梁动力学方程

用绝对节点坐标方法建模时,节点坐标相对绝对坐标进行定义。当梁绕定轴转动时,为方便描述刚性大范围定轴转动和梁本身的变形运动,引入浮点

坐标系,建立旋转梁动力学模型。

在三维空间坐标中,三维柔性梁绕着 Z 轴旋转,将其投影于旋转平面如图3所示。

图3中 r_1 、 r_2 、 η_1 、 η_2 分别表示点在绝对坐标系下的坐标和浮动坐标系下的坐标, θ 为浮动坐标系相对于绝对坐标系的转角。该点在两坐标系中的关系如式(23)所示。

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} + R \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

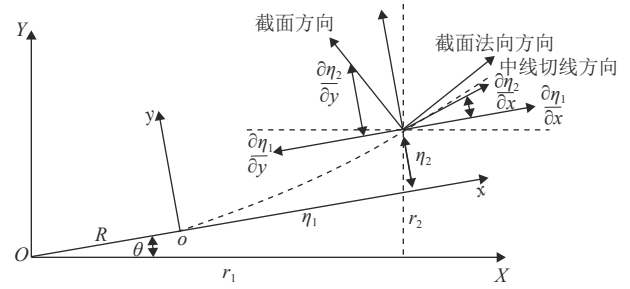


图3 浮动坐标与绝对坐标示意图

Fig.3 Schematic diagram of floating coordinates and absolute coordinate system

根据单元节点坐标 $\mathbf{e}(t)$ 的表示,结合式(23),单元浮动坐标 $\tilde{\mathbf{e}}_{ele}$ 与单元节点坐标 $\mathbf{e}(t)$ 关系为

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{U}_{CT} \tilde{\mathbf{e}}_{ele} + \mathbf{e}_{ele,R} \quad (24)$$

式中: $\mathbf{e}_{ele,R}$ 为轮毂半径坐标, R 为轮毂半径。

$$\mathbf{e}_{ele,R} = R \mathbf{U}_{CT} \mathbf{V} \quad (25)$$

$$\mathbf{V} = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1 \ 0 \ 0 \ \dots]^T$$

$$\mathbf{U}_{CT} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{CT} & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_{CT} \end{bmatrix} \quad (26)$$

式(25)~(26)中: \mathbf{V} 为单元坐标组装的布尔向量, \mathbf{N}_{CT} 为单元节点坐标变化矩阵。

$$\mathbf{N}_{CT} = \begin{bmatrix} P_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (28)$$

将式(24)代入式(22)中,旋转梁动力学方程为

$$\mathbf{M}_c \ddot{\tilde{\mathbf{e}}}_c + 2\dot{\theta} \mathbf{M}_{1c} \dot{\tilde{\mathbf{e}}}_c - \dot{\theta}^2 \mathbf{M}_{2c} \tilde{\mathbf{e}}_c - R\dot{\theta}^2 \mathbf{M}_{2c} \mathbf{V} + \mathbf{K}_c (\tilde{\mathbf{e}}) \tilde{\mathbf{e}}_c = \mathbf{Q}_c \quad (29)$$

式中: \mathbf{M}_{1c} 、 \mathbf{M}_{2c} 为做了不同变化后的质量矩阵, $\dot{\theta}$ 为旋转角速度, $\tilde{\mathbf{e}}$ 为浮动坐标向量, $\tilde{\mathbf{e}}_c = \mathbf{B}_c \tilde{\mathbf{e}}$ 为系统约束后的浮动坐标向量, $\ddot{\tilde{\mathbf{e}}}_c$ 为加速度, $\dot{\tilde{\mathbf{e}}}_c$ 为速度。

$$\mathbf{M}_{1c} = \rho \mathbf{B}_c^T \left(\int_0^l \left(\iint S_{\theta} dA \right) dx \right) \mathbf{B}_c \quad (30)$$

$$\mathbf{S}_{\theta} = (\mathbf{U}_{CT})^T \mathbf{S}^T \mathbf{S} \mathbf{U}_{CT,\theta} \quad (31)$$

$$\mathbf{M}_{2c} = \rho \mathbf{B}_c^T \left(\int_0^l \left(\iint S_{\theta\theta} dA \right) dx \right) \mathbf{B}_c \quad (32)$$

$$\mathbf{S}_{\theta\theta} = (\mathbf{U}_{CT})^T \mathbf{S}^T \mathbf{S} \mathbf{U}_{CT,\theta\theta} \quad (33)$$

\mathbf{U}_{CT} 为 24×24 的单元坐标变化矩阵, $\mathbf{U}_{CT,\theta}$ 和 $\mathbf{U}_{CT,\theta\theta}$ 分别为其对旋转角度的一阶导数和二阶导数。联合式(24)~(33), 计算得 \mathbf{M}_{1c} 和 \mathbf{M}_{2c} 为常数矩阵^[17]。

2.4 旋转梁动力学方程线性化

为了分析柔性旋转梁的频率特性及其模态变化, 采用摄动理论对旋转动力学方程式(29)分别进行 $\ddot{\mathbf{e}}_c$ 、 $\dot{\mathbf{e}}_c$ 和 \mathbf{e}_c 的线性化。获得旋转梁振动方程为

$$\mathbf{M}_c \delta \ddot{\mathbf{e}}_c + 2\dot{\theta} \mathbf{M}_{1c} \delta \dot{\mathbf{e}}_c + (\mathbf{K}_{T1c}(\tilde{\mathbf{e}}_{ep}) - \dot{\theta}^2 \mathbf{M}_{2c}) \delta \tilde{\mathbf{e}}_c = 0 \quad (34)$$

式中: \mathbf{K}_T 为切线刚度矩阵, \mathbf{K}_{T1} 为切线刚度矩阵的线性部分, $\tilde{\mathbf{e}}_{ep}$ 为当前旋转振动梁的平衡位置, $\mathbf{K}_{T1c}(\tilde{\mathbf{e}}_{ep})$ 表示约束后的 $\mathbf{K}_{T1}(\tilde{\mathbf{e}}_{ep})$, 约束方式与前一节相同。

$$\mathbf{K}_{T1}(\tilde{\mathbf{e}}_{ep}) = \frac{\partial (\mathbf{K}_{tm}(\tilde{\mathbf{e}}_{ep}))}{\partial \tilde{\mathbf{e}}_{ep}} \tilde{\mathbf{e}}_{ep} + \mathbf{K}_{tm}(\tilde{\mathbf{e}}_{ep}) \quad (35)$$

将 $\ddot{\mathbf{e}}_c = 0$, $\dot{\mathbf{e}}_c = 0$ 代入式(29), 通过牛顿迭代法求解式(36)得到 $\tilde{\mathbf{e}}_{ep}$ 。

$$-\dot{\theta}^2 \mathbf{M}_{2c} \tilde{\mathbf{e}}_{ep} + \mathbf{K}_c(\tilde{\mathbf{e}}_{ep}) \tilde{\mathbf{e}}_{ep} - R \dot{\theta}^2 \mathbf{M}_{2c} \mathbf{C} = 0 \quad (36)$$

将 $\delta \tilde{\mathbf{e}}_c = e^{j\omega t} \mathbf{Z}$ 代入式(34), 得到特征值方程

$$\left(j\omega \begin{bmatrix} \mathbf{K}_T & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{K}_T \\ \mathbf{K}_T & 2\dot{\theta} \mathbf{M}_{1c} \end{bmatrix} \right) \mathbf{Z} = 0 \quad (37)$$

式中: j 为虚数, t 为摆动时间, ω 为固有频率, \mathbf{Z} 为复杂列向量常量, \mathbf{K}_T 为切线刚度矩阵。

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_{T1c}(\tilde{\mathbf{e}}_{ep}) - \dot{\theta}^2 \mathbf{M}_{2c} \quad (38)$$

3 仿真案例

3.1 自由单摆动力学仿真

以自由单摆仅受重力作用下的动力学仿真为例, 验证本文方法所建梁模型的精确性。此时外力 \mathbf{F} 为重力, 是梁所受的体积力。

$$\mathbf{F} = [0 \quad -\rho g \quad 0] \quad (39)$$

根据形函数 \mathbf{S} 和式(17)、式(39)可得到单元广义分布重力的表达式

$$\mathbf{Q}_{ele}^T = \int_V [0 \quad -\rho g \quad 0] \mathbf{S} dV \quad (40)$$

式(39)~(40)中: ρ 为柔性梁密度, g 为重力加速度。

自由单摆如图4所示, 柔性梁截面高为 h , 截面宽为 w , 总长为 L , 质量为 m 。

本文根据文献[12]中的算例进行了仿真实验1: 弹性模量 E 为 0.8 MPa, 泊松比 ν 为 0.3, 截面高 h 为 0.02 m, 截面宽 w 为 0.08 m, 总长 L 为 1.2 m, 密度 ρ 为 5 540 kg/m³, 将单摆分成 12 单元。图5为仿真实验1中柔性单摆不同时间下的位置及形状, 表1为仿真实验1与文献[12]的算例在 $t=0.3$ s 时的实验结果对比, 证明了本文所采用的模型具有较高的准确性。

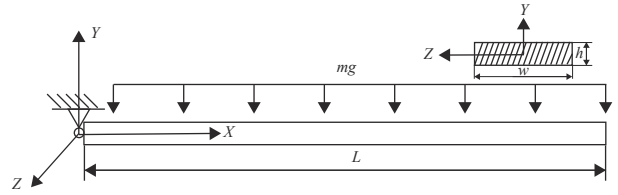


图4 自由柔性单摆

Fig.4 Free flexible pendulum

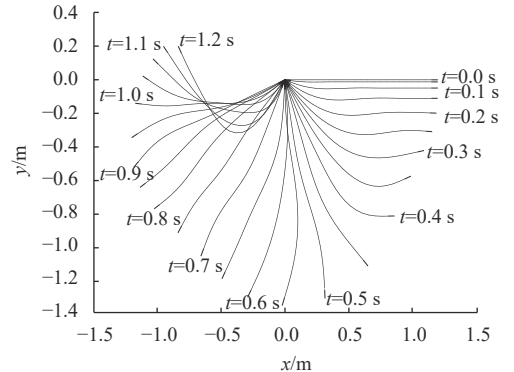


图5 仿真实验1柔性单摆不同时间下的位置及形状

Fig.5 Position and shape of flexible pendulum at different time

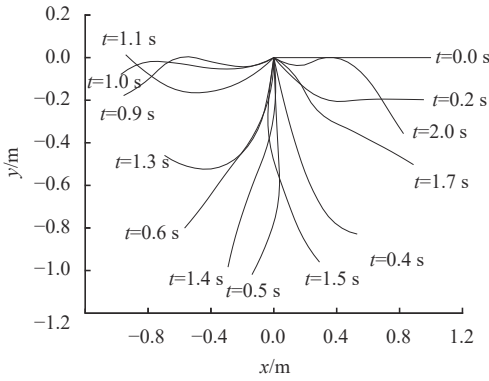
表1 本文的仿真结果与文献[12]实验结果的对比 ($t=0.3$ s)

Table 1 Comparison between simulation results and literature[12] in this paper ($t=0.3$ s)

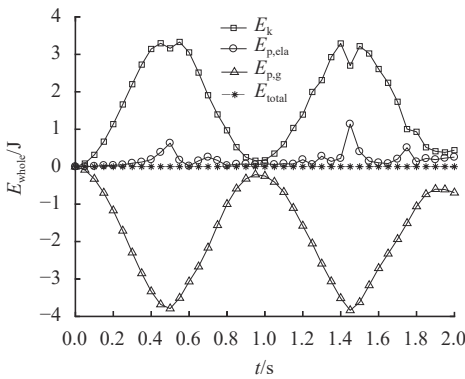
x坐标	y坐标		误差/%
	文献[12]结果	本文结果	
0	0	0	0
0.120 5	-0.130 2	-0.136 9	5.146 0
0.234 4	-0.237 6	-0.250 3	5.345 0
0.354 9	-0.328 7	-0.346 4	5.385 0
0.488 8	-0.402 8	-0.418 4	3.873 0
0.642 9	-0.453 5	-0.460 5	1.544 0
0.803 6	-0.464 5	-0.465 8	0.279 9
0.964 3	-0.447 2	-0.441 8	1.208 0
1.078 6	-0.420 8	-0.417 0	0.903 0

本文也对文献[18]中的算例进行了仿真实验2, 其弹性模量 E 为 2 MPa, 泊松比 ν 为 0.3, 截面高 h 为

0.01 m, 截面宽 w 为0.01 m, 总长 L 为1.0 m, 密度 ρ 为7200 kg/m³。图6(a)为仿真实验2中柔性单摆不同时间下的位置及形状, 表2为仿真实验2和文献[18]的算例在 $t=0.4$ s时的实验结果对比, 两者结果基本一致, 进一步验证了本文方法的准确性。图6(b)为单摆能量曲线图, 其中纵坐标为能量 E_{whole} , 横坐标为时间 t , E_k 为动能, $E_{p, \text{ela}}$ 为弹性变形能, $E_{p, \text{g}}$ 为重力势能, E_{total} 为总能量。从图中可以看出整个仿真过程中机械能始终守恒。



(a) 柔性单摆不同时间下的位置及形状



(b) 单摆能量曲线图

图6 仿真实验2柔性单摆不同时间下的仿真结果

Fig.6 Simulation results of flexible pendulum at different time

表2 本文仿真结果与文献[18]实验结果的对比 ($t=0.4$ s)

Table 2 Comparison between simulation results and literature[18] in this paper ($t=0.4$ s)

x坐标	y坐标		误差/%
	文献[18]结果	本文结果	
0	0	0	0
0.1224	-0.3671	-0.3663	-0.2179
0.1623	-0.4671	-0.4609	-1.3270
0.2097	-0.5600	-0.5591	-0.1607
0.2618	-0.6457	-0.6437	-0.3097
0.3246	-0.7124	-0.7244	1.6840
0.3919	-0.7671	-0.7788	1.5250
0.4624	-0.8100	-0.8124	0.2963
0.5344	-0.8326	-0.8287	-0.4684

3.2 非线性柔性梁固有频率的计算

3.2.1 柔性旋转梁固有频率的计算

为了验证旋转梁动力特性仿真精度, 本文计算不同转速下的无量纲固有频率, 并与文献[19]的计算结果进行对比。 ω_i 是指不同阶数的固有频率, 无量纲固有频率用不同阶数的固有频率与0阶的固有频率的比值表示, 即 ω_i/ω_0 。

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{E\Gamma}{mL^3}} \quad (41)$$

$$\Omega = \gamma\omega_0 \quad (42)$$

式(41)~(42)中: E 为柔性梁的弹性模量, Γ 为截面惯性矩, m 为柔性梁的质量, L 为柔性梁的总长度, Ω 为无量纲旋转速度, γ 为转速。

不同转速下无量纲固有频率前三阶计算结果如表3所示, 两者结果基本一致, 验证了旋转梁动力特性仿真精度。

3.2.2 不同转速下的各阶振型

梁模型的空间位置如图4所示, 设置弹性模量 E 为 5×10^8 Pa, 泊松比 ν 为0.3, 截面高 h 为0.02 m, 截面宽 w 为0.2 m, 总长 L 为8.0 m, 密度 ρ 为2677.67 kg/m³,

表3 不同转速下无量纲频率前三阶的结果对比

Table 3 Comparison of the results of the first three orders of dimensionless frequencies at different speeds

转速 γ	第一阶无量纲固有频率		第二阶无量纲固有频率		第三阶无量纲固有频率	
	文献[19]	本文	文献[19]	本文	文献[19]	本文
0	3.516	3.524	22.035	22.345	61.713	63.770
1	3.543	3.552	22.159	22.468	61.849	63.903
2	3.622	3.631	22.527	22.833	62.256	64.301
3	3.743	3.754	23.127	23.429	62.928	64.957
4	3.897	3.911	23.941	24.239	68.856	65.864
5	4.072	4.091	24.949	25.242	65.027	67.010
10	5.041	5.108	32.113	32.402	73.985	75.828
20	6.739	7.056	51.138	51.740	101.479	103.243
50	10.278	12.506	115.751	117.423	204.458	207.592

将单摆分成10单元进行仿真。绘制了不同转速下的前6阶模态振型,并将各阶振型投影到旋转平面(xy平面)或垂直于旋转平面的平面(xz平面)。

如图7~9所示,z方向模态振型从静止时的第3阶振型,变为了图8中转速为10 r/min的第2、6阶振型以及图9中转速为100 r/min的第2、4、6阶振型。随着转速的增加,前6阶中垂直于旋转平面(z方向)的振型所对应的频率会逐渐转换为低阶频率。

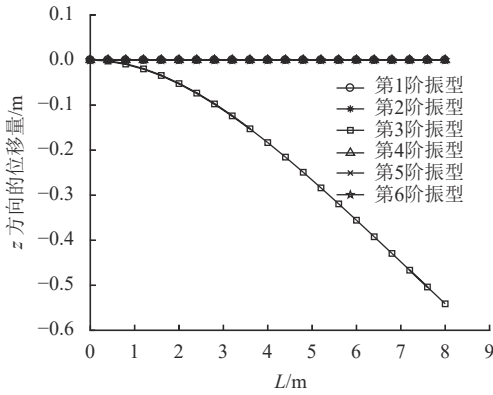


图7 静止时前六阶振型

Fig.7 The first six modes at rest

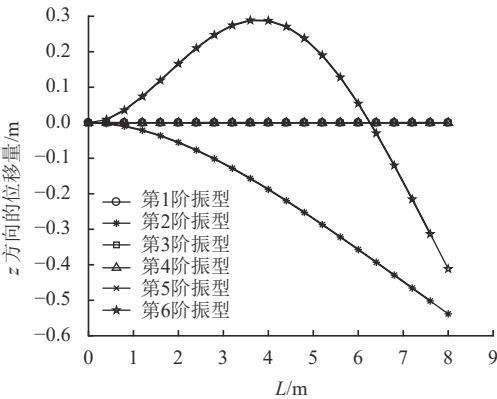


图8 10 r/min前六阶振型

Fig.8 The first six modes at 10 r/min

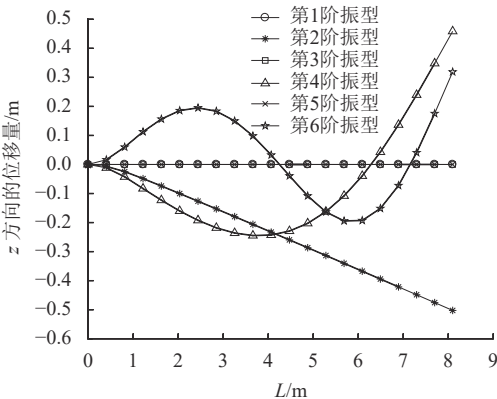
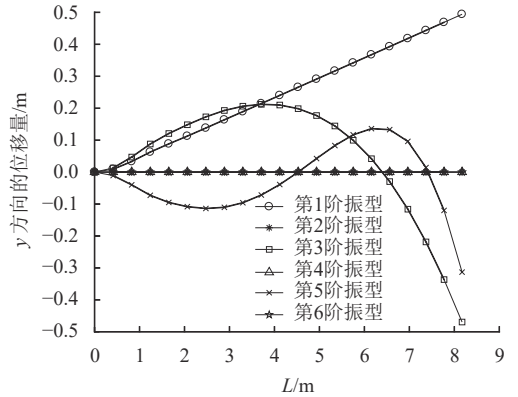


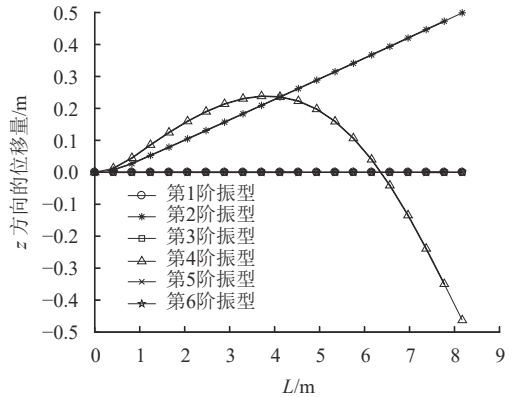
图9 100 r/min时前六阶振型

Fig.9 The first six modes at 100 r/min

图10中,转速为140 r/min,y方向出现了3阶的振型,z方向出现了2阶振型,第6阶为扭转振型;图11中,转速为300 r/min,y方向出现了2阶的振型,z方向出现了2阶,第4阶为扭转振型,第6阶为拉伸振型。由此可见,随着转速的增加,扭转和拉伸模态振型所对应的频率会逐渐转换为低阶频率。



(a) y方向的振型



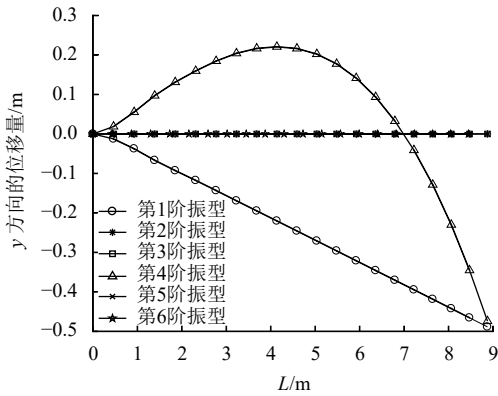
(b) z方向的振型

图10 140 r/min时前六阶振型

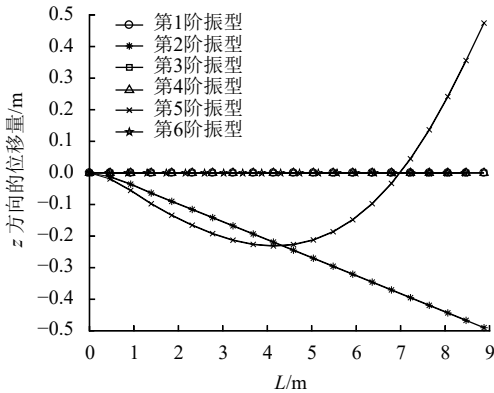
Fig.10 The first six modes at 140 r/min

4 结论

本文在绝对节点坐标法基础上,运用连续介质理论推导了三维柔性梁的动力学方程,并对不同文献中的单摆案例进行了仿真,验证了本文方法的有效性。然后对动力学方程进行了线性化处理,计算了不同转速下柔性旋转梁的无量纲固有频率,并分析了非线性柔性旋转梁在不同转速下的模态振型变化特性。通过三维柔性梁动力学建模与动力特性的研究可得到以下结论。(1) 本文所建非线性梁模型能精确分析三维柔性梁的时域动力学响应;(2) 带浮动坐标的绝对节点坐标建模方法,能有效分析柔性旋转柔性梁的频域振动特性;(3) 三维柔性旋转梁随着转速的增加出现动力刚化现象,且垂直旋转平面的模



(a) y方向的振型



(b) z方向的振型

图11 300 r/min时前六阶振型

Fig.11 The first six modes at 300 r/min

态振型以及扭转和拉伸模态振型所对应的频率会转化为低阶频率。

参考文献:

- [1] 王红州, 蔡恒欲, 任桐欣, 等. 直升机旋翼动力学优化浅析[J]. *兵器装备工程学报*, 2018, 39(1): 25-28.
WANG H Z, CAI H Y, REN T X, *et al.* Analysis of helicopter rotor dynamic optimization [J]. *Journal of Ordnance Equipment Engineering*, 2018, 39(1): 25-28.
- [2] 黄俊东, 夏鸿建, 李德源, 等. 大型风力机柔性叶片非线性气弹模态分析[J]. *机械工程学报*, 2020, 56(14): 180-187.
HUANG J D, XIA H J, LI D Y, *et al.* Nonlinear aeroelastic modal analysis of large wind turbine flexible blades [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2020, 56(14): 180-187.
- [3] REN H. A simple absolute nodal coordinate formulation for thin beams with large deformations and large rotations[J]. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2015, 10(6): 061005.
- [4] AHMED A S. Computer implementation of the absolute nodal coordinate formulation for flexible multibody dynamics [J]. *Nonlinear Dynamics*, 1998, 16(3): 293-306.
- [5] ZHANG X S, ZHANG D G, CHEN S J, *et al.* Modal characteristics of a rotating flexible beam with a concentrated mass based on the absolute nodal coordinate formulation [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2017, 88(1): 61-77.
- [6] CHEN Y Z, ZHANG D G, LI L. Dynamic analysis of rotating curved beams by using absolute nodal coordinate formulation based on radial point interpolation method [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2019, 441: 63-83.

- [7] 郑彤, 章定国, 洪嘉振. 三维大变形梁系统的动力学建模与仿真[J]. *机械工程学报*, 2016, 52(19): 81-87.
ZHENG T, ZHANG D G, HONG J Z. Dynamic modeling and simulation for three dimensional flexible beam systems with large deformations [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2016, 52(19): 81-87.
- [8] 赵春璋, 余海东, 王皓, 等. 基于绝对节点坐标法的变截面梁动力学建模与运动变形分析[J]. *机械工程学报*, 2014, 50(17): 38-45.
ZHAO C Z, YU H D, WANG H, *et al.* Dynamic modeling and kinematic behavior of variable crosssection beam based on the absolute nodal coordinate formulation [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2014, 50(17): 38-45.
- [9] 章孝顺, 章定国, 陈思佳, 等. 基于绝对节点坐标法的大变形柔性梁几种动力学模型研究[J]. *物理学报*, 2016, 65(9): 148-157.
ZHANG X S, ZHANG D G, CHEN S J, *et al.* Several dynamic models of a large deformation flexible beam based on the absolute nodal coordinate formulation [J]. *Acta Physical Sinica*, 2016, 65(9): 148-157.
- [10] 陈渊钊, 章定国, 黎亮. 平面细长梁基于无网格径向基点插值的绝对节点坐标法[J]. *振动工程学报*, 2018, 31(2): 245-254.
CHEN Y Z, ZHANG D G, LI L. An absolute nodal coordinate formulation based on radial point interpolation method for planar slender beams [J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2018, 31(2): 245-254.
- [11] 马超. 绝对节点坐标列式单元动力学建模方法研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2017.
- [12] 李永亮. 基于绝对节点坐标法的柔性梁动力学建模与分析[D]. 西安: 西安电子科技大学, 2014.
- [13] 姚震, 余海东, 王皓. 基于绝对节点坐标法的柔性梁结构动态特性参数灵敏度分析[J]. *机械设计与研究*, 2018, 34(3): 30-34.
YAO Z, YU H D, WANG H. Sensitivity analysis of dynamic parameters of flexible beams based on absolute nodal coordinate formulation [J]. *Machine Design & Research*, 2018, 34(3): 30-34.
- [14] 李全乐, 赵春花. 基于绝对节点坐标法的高次插值梁单元建模[J]. *上海工程技术大学学报*, 2018, 32(4): 329-333.
LI Q L, ZHAO C H. Higher-order interpolation beam element models based on absolute node coordinate formulation [J]. *Journal of Shanghai University of Engineering Science*, 2018, 32(4): 329-333.
- [15] 田强. 基于绝对节点坐标方法的柔性多体系统动力学研究与应用[D]. 武汉: 华中科技大学, 2009.
- [16] 黎明安. Matlab/Simulink动力学系统建模与仿真[M]. 北京: 国防工业出版社, 2012.
- [17] MAQUEDA L G, BAUCHAU O A, SHABANA A A. Effect of the centrifugal forces on the finite element eigenvalue solution of a rotating blade: a comparative study [J]. *Multibody System Dynamics*, 2008, 19(3): 281-302.
- [18] REFAATY Y, AHMED A S. Three dimensional absolute nodal coordinate formulation for beam elements: implementation and Applications[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2001, 123(4): 614-621.
- [19] MARCELLO B, AHMED A S. Study of the centrifugal stiffening effect using the finite element absolute nodal coordinate formulation [J]. *Multibody System Dynamics*, 2002, 7(4): 357-387.