第 15 卷　第 2 期　广东工业大学学报　Vol.15　No.2
1998 年 6 月　Journal of Guangdong University of Technology　June 1998

关于生产组织中排序问题的研究

何文章[1)]　刘海林[2)]

1)黑龙江矿业学院基础部,鸡西,158105　2)广东工业大学数理系,广州,510500

摘要　对某工厂的生产组织中 m×n 排序问题进行了研究,结合该厂目前的生产情况,提出了新的模型,建立了新的算法,用新算法对问题进行计算,结果可使生产量大幅度提高.

关键词　m×n 排序;生产组织;加工时间

中图资料法分类号　O223

m×n *Flow－shop* 排序问题在实际问题中有着广泛的应用,已出现了一些求解方法[1～3].本文对某工厂生产中出现的产品各零件的加工顺序问题进行了研究,根据工厂目前的需要对文[3]中的模型进行了修改,结合 *W*.*Szwarc* 的最优消去准则和节点选取策略对文[3]中的方法进行了改进,并用此法对修改的模型进行了计算,利用计算所得的顺序可使生产量大大提高,满足了工厂的实际需要.该工厂所需解决的排序问题如下:

该厂要生产某一种产品,该主品由 45 个零件组成,分别记为 $J_1J_2\cdots J_{45}$,这 45 个零件都需经过 12 道工序加工,这 12 道工序依次记为 $M_1,M_2,\cdots,M_{12}$,且 45 个零件在每道工序上的加工顺序都相同,零件 J_j 经工序 M_i 加工的时间 a_{ij}是已知的($i=1\sim12,j=1\sim45$),当 J_j 不经 M_i 时,令 $a_{ij}=0$,现在的问题是如何安排生产才能使加工 T 个产品总加工时间最短.

由于实际生产中的 12 道工序中的刻字、油漆等道工序经过的零件很少,故这 5 道工序对总的加工时间不产生影响,可省去,于是问题简化为 7 道工序.由于以前是计划经济,生产的产品按国家计划分配给各个用户,所以文[3]中的模型在当时是一个比较合理且接近实际生产需要的模型.然而由于它是在计划经济体制下建立的,目前已不适应市场经济的需要.本文是市场经济的条件下,对文[3]中的模型进行了改进.

1　改进的模型

假设通过预测技术可知市场的需求量为 T,即全年共需要生产 T 个产品,将其分期分批投入生产,按目前工厂的需要应分 12 批投入生产,那么各批投入多少时才能使总加工时间最短;若将每批投入的产品整体看成一个广义零件,仍分别记为 $J_1J_2\cdots J_n$($n=12$),这样各批产品在每一道工序上加工时间就可看成是各广义零件 $J_1J_2\cdots J_n$ 在每一道工序上的加工时间,当各批投入的产品数量已知时,各广义零件在各道工序上的加工时间通过简单的计算便可得到,因而可以认为是已知的,仍记为 a_{ij}($i=1\sim m,j=1\sim n$),于是问题化为:

n 批投入的产品数 $k_1k_2\cdots k_n$ 各为多少时,且给各广义零件 $J_1J_2\cdots J_n$ 排怎样一个顺序才能使 $J_1J_2\cdots J_n$ 以过工序 $M_1\ M_2\cdots M_7$ 所需的总加工时间最短?

收稿日期:1997－09－17　何文章　男　36 岁　副教授

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www

据厂方经验，一般各 k_i 变化的步长为500个，即 $k_{i新}=k_{i旧}\pm 500\cdot\rho$，其中 ρ 为某非负整数应使 $k_{i新}\geqslant 1000$ 个，于是问题变为：

当零件总数 T 一定时，求一组 $k_i(i=1\sim n)$ 满足 $k_i\geqslant 1000$，$k_1+k_2+\cdots+k_n=T$，使广义零件 J_i 中包含 k_i 个零件 $(i=1\sim n)$，且要给广义零件 $J_1J_2\cdots J_n$ 排一个顺序使其经工序 $M_1M_2\cdots M_7$ 所需的时间最短．

2 下界计算公式，消去准则和节点选取策略

2.1 下界计算公式

定义1 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{k\times n}$，令 $S_1=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}+\sum_{j=2}^{k}a_{jn}$，$S_k=\sum_{j=1}^{n}a_{kj}+\sum_{j=1}^{K-1}a_{j1}$，$S_i=\sum_{j=1}^{i-1}a_{j1}+\sum_{j=i+1}^{k}a_{jn}+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}$ $(i=2,3,\cdots,k-1)$，$S=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}(S_i)$，则称 S 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的次大可行和．

定义2 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{(m+1)\times(n+1)}$，且 $b_{i1}=0$，$b_{1j}=0$，$i=1\sim m+1$，$j=1\sim n+1$，$b_{ij}=a_{i-1,j-1}+\max(b_{i-1,j},b_{i,j-1})$，$i,j\geqslant 2$，则称 $b_{m+1,n+1}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最大可行和．

定理1 对于 $m\times n$ *Flow－shop* 排序问题，假设前面某 j 个零件已固定．

(1)当 $j=1$ 时，若第 i 个零件 J_i 排在最前面，令

$$\left\{\begin{array}{ll}
\bar{S}_k=\min\limits_{k\neq i}\sum\limits_{j=k+1}^{m}a_{jk}, & (k=1\sim m-1);\\
S_k=\bar{S}_k+\sum\limits_{j=1}^{k}a_{ji}+\sum\limits_{j\neq i}^{n}a_{kj}, & (k=1\sim m-1);\\
S_m=\sum\limits_{j=1}^{m}a_{ji}+\sum\limits_{j\neq i}^{n}a_{mj};\\
S_o=\max\{S_k,k=1\sim m\};\\
P_k=a_{1i}+\sum\limits_{j\neq i}^{n}a_{kj}+\min\limits_{r\neq i,\bar{r}\neq i,r}(\sum\limits_{j=1}^{k-1}a_{jr}+\sum\limits_{j=k+1}^{m}a_{j\bar{r}}), & (k=2\sim m);\\
P=\max\{P_k,2\leqslant k\leqslant m\};\\
r_{1i}=\max(S_o,P),(i=1\sim n).
\end{array}\right.\tag{1}$$

由 $r_{1i}(i=1\sim n)$ 为零件 J_i 排在最前面时总的加工时间的一个下界．

(2)当 $j>1$ 时，设排在前 j 个位置的零件依次为 $J_{w_1}J_{w_2}\cdots J_{w_j}$，记 $D_{jw_j}=(w_1w_2\cdots w_j)$．

$$R_i=\left\{\begin{array}{llll}
a_{1w_1}, & a_{1w_2}, & \cdots, & a_{1w_j}\\
a_{2w_1}, & a_{2w_2}, & \cdots, & a_{2w_j}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
a_{iw_1}, & a_{iw_2}, & \cdots, & a_{iw_j}
\end{array}\right.\text{的次大可行和,}\quad (i=1\sim m).$$

$$\left\{\begin{array}{ll}
S_i=R_i+\sum\limits_{j\in \bar{D}_{jw_j}}a_{ij}+\min\limits_{j\in \bar{D}_{jw_j}}\sum\limits_{r=i+1}^{m}a_{rj}, & (i=1\sim m-1);\\
S_m=R_m+\sum\limits_{j\in \bar{D}_{jw_j}}a_{mj};\\
r_{jw_j}=\max\{S_i,1\leqslant i\leqslant m\}.
\end{array}\right.\tag{2}$$

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www

则 r_{rw_j} 为零件 $J_{w_1}J_{w_2}\cdots J_{w_j}$ 排在前 j 个位置时总的加工时间的一个下界 .

2.2 消去准则

令 $N=\{1,2,\cdots,n\}$, $D_{jw_j}=(w_1w_2\cdots w_j)\subset N$, 以 (D_{jw_j},i) 表示顺序 $(w_1 w_2\cdots w_j i)$, 令 $t_{pq}(D_{jw_j}$ 表示矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{pw_1} & a_{pw_2} & \cdots & a_{pw_j} \\ a_{p+1w_1} & a_{p+1w_2} & \cdots & a_{p+1w_j} \\ a_{qw_1} & a_{qw_2} & \cdots & a_{qw_j} \end{pmatrix}$$

的最大可行和,消去准则可用 *W · Szwarc* 的最优消去准则 . 这个准则可用 *Szwarc* 证明的如下定理描述:

定理 2　令 $D_{jw_j}=(w_1w_2\cdots w_j)$, $\{i,r\}\cap D_{jw_j}=\varnothing$, 如果 $t_{1q}(D_{jw_j},i)\leqslant t_{1q}(D_{jw_j},r)-a_{qr}+min(a_{qi},a_{q+1\,i},\cdots,a_{mi})$, $1\leqslant q\leqslant m$, 则可消去所有 $(D_{jw_j},r,\cdots)$ 型的顺序 .

为了计算 $t_{1q}(D_{jw_j},\alpha)$, $\alpha\in N\setminus D_{jw_j}$, $q=1\sim m$, 可用如下的公式:

$$t_{1q}(D_{jw_j},\alpha)=max\{t_{1q}(D_{jw_j}),t_{1q-1}(D_{jw_j},\alpha)\}+\alpha_{q\alpha}. \tag{3}$$

2.3 节点选取策略

算法中节点的选择方法是在目前节点中选择加工时间下界最小的节点,若存在几个具有最小下界的节点,则选择其中机器总空闲时间最小的节点,机器总空闲时间是指 m 台机器的空闲时间之和 . 若目前刚分出的节点为 $(D_{jw_j},\alpha,\cdots)$, 其机器总空闲时间为:

$$b(D_{jw_j},\alpha)=\sum_{q=1}^{m}[t_{1q}(D_{jw_j},\alpha)-\sum_{i\in(D_{jw_j},\alpha)}a_{qi}]. \tag{4}$$

3 改进的算法

本文的算法是将消去准则(定理 2)和节点选取策略式(4)用于文[3]中的算法而得 .

改进的算法:任取初始顺序,设为 $J_1J_2\cdots J_n$.

1)　令 Z_1=初始排序总的加工时间;

2)　分别将 J_i 排在第一位,并记 $D_{1i}=(i)$, 按式(1)求 $r_{1i}(i=1\sim n)$, 若 $i_o\in\{1,2,\cdots,n\}$, 使 $r_{1i_o}=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}r_{1i}$, 令 $r_1=r_{1i_o}$, $D_1=(i_o)$, $k=1$ 转 4);

3)　若 $J_{w_1}J_{w_2}\cdots J_{w_k}$ 已排在前 k 个位置, $(w_k\in N\setminus[(w_1\cdots w_{k-1})\cup B_k], k>1)$, 记 $D_{kw_k}=(w_1w_2\cdots w_k)$, 对每一个 D_{kw_k} 按式(2)求 r_{kw_k}, 并求 $\min\limits_{w_k}r_{kw_k}$, 若有不只一个 w_k 使 r_{kw_k} 取得极小,记这样的 w_k 的集合为 Q_k, 若 D_{kw_k} 使 $b(D_{kw_k})=\min\limits_{w_i\in Q_k}b(D_{kw_i})$, 令 $D_k=D_{kw_k}$, $r_k=r_{kw_k}$;

4)　若 $k=n-2$, 转 5); 否则,任取 D_k 以外的一个零件 J_i 排到 D_k 的最右边,得 $(D_k,i)(i\in N\setminus D_k)$, 对于所有 $i,j\in N\setminus D_k$, $i\neq j$. 按消去准则定理 2 消去可被消去的所有顺序 $(D_k,j,\cdots)$, 这种 j 的集合记为 B_{k+1}, 令 $k=k+1$, 转 3);

5)　此时 $D_{n-2}=(w_1w_2\cdots w_{n-2})$, 令顺序 (D_{n-2},w_{n-1},w_n) 和 (D_{n-2},w_n,w_{n-1}) 总加工时间最小者为 Z, 令 $Z_1=min(Z,Z_1)$;

6)　若有某 r_j 使 $r_j<Z_1(1\leqslant j\leqslant n)$, 且当 $i>j$ 时有 $r_i\geqslant Z_1$(若 $j\neq n$), 令 $k=j$, 转 4); 否则,所

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www

有 $r_j \geqslant Z_1$，则对应于加工时间为 Z_1 的顺序即为最优顺序．

5 实际应用

利用上述算法对本文中的模型在产品总数 T 为 3 万、4 万、5 万、6 万分别进行了计算，结果见本文中表 1，其中各零件的加工时间见文[3]中表 1．由本文中表 1 结果可知，生产 3～6 万个产品均可在一年内完成(工厂每天平均工作 12h)，而文[3]中方案最多可生产 5 万产品(见文[3]中表 3)，因此用本文中方案可大大提高生产量．

表 1 最优批量数排列及加工时间

总产品数/万	1～12 批最优批量数排列/万						总加工时间 t/h
3	0.25 0.25	0.25 0.25	0.25 0.25	0.25 0.25	0.25 0.4	0.25 0.1	2051.03
4	0.3 0.3	0.3 0.3	0.3 0.3	0.3 0.3	0.5 0.7	0.3 0.1	2564.62
5	0.4 0.4	0.4 0.4	0.4 0.5	0.4 0.6	0.4 0.6	0.4 0.1	3113.41
6	0.5 0.5	0.5 0.5	0.5 0.6	0.5 0.5	0.5 0.8	0.5 0.1	3761.86

参 考 文 献

1 越民义，韩继业．n 个零件在 m 台机器上的加工顺序问题．中国科学，1975，(5)：462～470

2 韩继业．排序问题的一个判别条件和一类特殊的 m×n 排序问题．应用数学学报，1980，3(4)：301～305

3 王宇平，何文章．m×n 排序问题在实际中的应用．数学的实践与认识，1990，(4)：1～5

Research on Scheduling Problem of Production Management

He Wenzhang[1)] Liu Halin[2)]

1) Dept. of Elementary courses, Heilongjiang Mining Institute, Jixi, 158105

2) Dept. of Mathematics and Physics, GDUT, Guangzhou, 510500

Abstract The $m \times n$ flow－shop scheduling in production management of a factory is researched. A new model and algorithm is presented, combining with the production situation of the factory at present. By using the new one the output of production is larger than the original one.

Key words $m \times n$ flow－shop scheduling; production managment; processing time

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www