# 实反次对称矩阵的对角化

陶鲜花

(茂名学院 数学系, 广东 茂名 525000)

摘要: 讨论了实反次对称矩阵的次特征值与次特征向量的性质及实反次对称矩阵的对角化问题. 得到了如下结论: 若 $\boldsymbol{A}$ 为实反次对称矩阵, 则存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$, 用 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{P}$ 的次转置矩阵 $\boldsymbol{P}^{ST}$ 分别右乘和左乘 $\boldsymbol{A}$, 即可使之成为一个对角矩阵.

关键词: 实反次对称矩阵; 次特征值; 次特征向量

中图分类号: O151.21　　文献标识码: A　　文章编号: 1007-7162(2005)03-0116-05

关于对称、反对称及次对称矩阵已有较详细的讨论, 而实反次对称矩阵却少有人提及, 本文给出了实反次对称矩阵的次特征值与次特征向量的概念, 讨论了它的次特征向量的性质, 并得出了: 若 $\boldsymbol{A}$ 是实反次对称矩阵, 则存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使 $\boldsymbol{P}^{ST}\boldsymbol{AP}=\Lambda$ 的结论.

## 1 预备知识

定理 1[1]: 设, $\boldsymbol{A}(\lambda)=(a_{ij}(\lambda))\in \boldsymbol{P}[\lambda]^{m\times n}$, 且 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}(\lambda))=r$, 则 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 相抵于如下"对角形"矩阵

$$\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_r(\lambda) & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{m\times n} = \boldsymbol{D}_r(\lambda),$$

其中 $d_i(\lambda)(i=1,\cdots,r)$ 是首项系数为 1 的多项式, 并且 $d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)(i=1,\cdots r-1)$, "对角形"矩阵 $\boldsymbol{D}_r(\lambda)$ 称为 $\lambda$ 矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 在相抵下的标准形或 Smith 标准形.

不难知道: 对任何 $n$ 阶数字矩阵 $\boldsymbol{A}$, 有 $\mathrm{rank}(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=n$, 从而 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{D}_n(\lambda)$, 即 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{D}_n(\lambda)$ 相抵.

定理 2[1]　相抵的 $\lambda$ 矩阵具有相同的秩和相同的各阶行列式因子.

定理 3[1]　设 $\boldsymbol{A}\in C^{m\times n}$, 则 $\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{AA}^H$ 的特征值均为非负实数(其中 $\boldsymbol{A}^H$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的共轭转置阵).

---

收稿日期: 2004-04-02, 修回日期: 2005-01-12

基金项目: 茂名学院科学基金项目(203101)

作者简介: 陶鲜花(1961-), 女, 副教授, 主要研究方向为代数.

## 2　定义与性质

定义 1[2]　设矩阵: $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, 则称矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{mn} & a_{m-1,n} & \cdots & a_{2n} & a_{1n} \\ a_{m,n-1} & a_{m-1,n-1} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m2} & a_{m-1,2} & \cdots & a_{22} & a_{12} \\ a_{m1} & a_{m-1,1} & \cdots & a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的次转置, 记为 $\boldsymbol{A}^{ST}$, 即 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{ST}$.

定义 2[2]　设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶方阵, 若 $\boldsymbol{A}^{ST}=\boldsymbol{A}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 是次对称矩阵; 若 $\boldsymbol{A}^{ST}=-\boldsymbol{A}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 是反次对称矩阵.

定义 3　形如

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

的矩阵, 称为( $n$ 阶) 次单位矩阵.

关于矩阵, 不难验证有如下性质( 在下面的性质中矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 阶矩阵) :

性质 1[2]　1) $\boldsymbol{J}^{T}=\boldsymbol{J}$;　2) $\boldsymbol{J}^{ST}=\boldsymbol{J}$;

3) $\boldsymbol{J}^{-1}=\boldsymbol{J}$;　4) $|\boldsymbol{J}|=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

性质 2[2]　1) $\boldsymbol{J}_n\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{J}_m=\boldsymbol{A}^{ST}$;　2) $\boldsymbol{J}_n\boldsymbol{A}^{ST}\boldsymbol{J}_m=\boldsymbol{A}^{T}$.

性质 3[2]　1) $(\boldsymbol{A}^{ST})^{ST}=\boldsymbol{A}$;　2) $(\boldsymbol{AB})^{ST}=\boldsymbol{B}^{ST}\boldsymbol{A}^{ST}$.

## 3　主要结论

定义 4　设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶方阵, 若存在数 $\lambda$ 和非零向量 $\boldsymbol{X}$, 使得 $\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{JX}$, 则称 $\lambda$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的次特征值, $\boldsymbol{X}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 属于 $\lambda$ 的次特征向量.

显然: 若 $\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{JX}$, 则有 $\boldsymbol{JAX}=\lambda\boldsymbol{X}$, 因此方阵的特征向量所具有的性质, 次特征向量也具备.

定理 4　实反次对称矩阵的次特征值必为共轭纯虚数或零。

证明:　设 $\boldsymbol{A}\in R^{n\times n}$, 且 $\boldsymbol{A}^{ST}=-\boldsymbol{A}$, 若

$$\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{JX}$$

1) 首先证明 $\lambda$ 为纯虚数或零

用 $\boldsymbol{X}^{ST}$ 左乘 $\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{JX}$ 的两边得

$$\boldsymbol{X}^{ST}\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}^{ST}\boldsymbol{JX},$$

于是有

$$\overline{\boldsymbol{X}^{ST}\boldsymbol{AX}}^{ST}=\overline{\lambda\boldsymbol{X}^{ST}\boldsymbol{JX}}^{ST},$$

而

$$\overline{\boldsymbol{X}^{ST}\boldsymbol{AX}}^{ST}=[\boldsymbol{X}^{ST}\overline{\boldsymbol{AX}}]^{ST}=\boldsymbol{X}^{ST}A^{ST}[\boldsymbol{X}^{ST}]^{ST}=-\boldsymbol{X}^{ST}\boldsymbol{AX},$$

$$\overline{\lambda X^{ST} JX}^{ST} = \left[\lambda X^{ST} \overline{JX}\right]^{ST} = \overline{\lambda X}^{ST} J^{ST} \left[X^{ST}\right]^{ST} = \lambda X^{ST} JX.$$

所以
$$\lambda X^{ST} JX = - \overline{\lambda X}^{ST} JX.$$

又
$$X^{ST} JX = J_1^{-1}(J_1 X^{ST} J) X = J_1^{-1} X^{T} X = \| X \|^2 \neq 0,$$

故
$$2\mathrm{Re}\,\lambda = \lambda + \bar{\lambda} = 0,$$

从而 $\lambda$ 为纯虚数或零.

2) 其次证明 $\bar{\lambda}$ 也是 $A$ 的次特征值

由 $AX = \lambda JX$ 得:
$$\overline{AX} = \overline{\lambda JX},$$

即得
$$A\bar{X} = \bar{\lambda} J\bar{X}.$$

从而知 $\bar{\lambda}$ 也是 $A$ 的次特征值.

综上所述, 实反次对称矩阵的次特征值必为共轭纯虚数或零.

定理 5 设 $A$ 为 $n$ 阶实反次对称矩阵, 则 $A$ 的属于不同的次特征值所对应的次特征向量正交.

证明 1) 设 $|\lambda_1| \neq |\lambda_2|$, $AX_1 = \lambda_1 JX_1$, $AX_2 = \lambda_2 JX_2$ 则 $X_1$ 与 $X_2$ 正交.

因为若
$$AX = \lambda JX,$$

由于
$$A^{T} AX = \lambda A^{T} JX = -\lambda^2 X,$$

即 $A$ 的属于次特征值 $\lambda$ 的次特征向量 $X$ 也是 $A^{T}A$ 的属于特征值 $-\lambda^2$ 的特征向量, 而 $|\lambda_1| \neq |\lambda_2|$, 所以 $\lambda_1^2 \neq \lambda_2^2$, 从而 $X_1$ 与 $X_2$ 正交[3].

2) 设 $|\lambda_1| = |\lambda_2| \neq 0$, 即 $\lambda$ 与 $\bar{\lambda}$ 的情形: 若 $AX = \lambda JX$, 则 $X$ 与 $\bar{X}$ 正交.

因为有
$$A\bar{X} = \bar{\lambda} J\bar{X},$$

用 $X^{ST}$ 左乘 $A\bar{X} = \bar{\lambda} J\bar{X}$ 的两边得:

$$X^{ST} A\bar{X} = \bar{\lambda} X^{ST} J\bar{X},$$

而
$$X^{ST} A\bar{X} = \left(\overline{A^{ST} X}\right)^{ST} \bar{X} = \left(\overline{-AX}\right)^{ST} \bar{X} = \left(\overline{-\lambda JX}\right)^{ST} \bar{X} = -\bar{\lambda} \bar{X}^{ST} J\bar{X},$$

$$X^{ST} J\bar{X} = J_1^{-1} X^{T} \bar{X} = (X, \bar{X}),$$

所以
$$2\bar{\lambda} X^{T} \bar{X} = 0.$$

从而 $X$ 与 $\bar{X}$ 正交.

定理证毕.

定理 6 设 $A$ 为 $n$ 阶实反次对称矩阵, 则 $\mu i$ 为 $A$ 的次特征值的充要条件是 $\mu^2$ 为 $A^{T}A$ 的特征值(其中 $\mu$ 为实数).

证明 必要性: 设 $\mu i$ 为 $A$ 的次特征值, 由定理 5 的证明可知 $-(\mu i)^2 = \mu^2$ 为 $A^{T}A$ 的特征值;

则
$$|A^{T}A - \mu^2 E| = 0,$$

于是有
$$|A - \mu iJ|^{T} |A - \mu iJ| = 0.$$

所以 $\mu i$ 为 $A$ 的次特征值.

对于实反次对称矩阵, 由上面的讨论我们不难知道: 若 $\mu^2(\mu \neq 0)$ 为 $A^{T}A$ 的特征值, 则必是 $A^{T}A$ 的 $2k$ 重特征值( $k$ 为正整数), $\pm \mu i$ 必是 $A$ 的 $k$ 重次特征值, 即 $\pm \mu i$ 均是 $JA$ 的 $k$ 重特征值; 若零为 $A^{T}A$ 的 $s$ 重特征值, 则零也为 $A$ 的 $s$ 重次特征值, 且对于 $A^{T}A$ 属于零特征值的特征

向量$\boldsymbol{X}$, 也是$\boldsymbol{A}$的属于零次特征值的次特征向量.

引理 1　设 $\mu$ 为 $n$ 阶数字方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $k$ 重特征值, 则 $\mathrm{rank}(\mu\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\geqslant n-k$.

证明　因 $\mu$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 $k$ 重特征值, 于是有 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-\mu)^k f(\lambda)$ ($f(\lambda)$ 为 $\lambda$ 的 $n-k$ 次多项式, 且 $f(\mu)\neq 0$), 由定理 1 知:

$$\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{D}_n(\lambda).$$

又由定理 2 知: 在 $\boldsymbol{D}_n(\lambda)$ 的 $n$ 个不变因子 $d_1(\lambda),\cdots,d_n(\lambda)$ 中, 至多是后面的 $k$ 个不变因子含有因子 $(\lambda-\mu)$, 从而

$$\mathrm{rank}(\mu\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\geqslant n-k.$$

引理 2　设 $\boldsymbol{A}\in R^{n\times n}$, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{ST}}=-\boldsymbol{A}$, 且 $\mu\mathrm{i}\,(\mu\neq 0)$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 $k$ 重次特征值, 则

$$\mathrm{rank}(\mu\mathrm{i}\boldsymbol{J}-\boldsymbol{A})\leqslant n-k.$$

证明　由 $\mu\mathrm{i}$ 为实反次对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $k$ 重次特征值, 可知 $\mu^2$ 为实对称矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的 $2k$ 重特征值, 则

$$\mathrm{rank}(\mu^2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=n-2k,$$

又

$$\mu^2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=(\mu\mathrm{i}\boldsymbol{J}-\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}(\mu\mathrm{i}\boldsymbol{J}-\boldsymbol{A}).$$

设

$$\mathrm{rank}(\mu\mathrm{i}\boldsymbol{J}-\boldsymbol{A})=r,$$

则

$$n-2k\geqslant 2r-n.$$

即

$$r\leqslant n-k.$$

定理 7　若 $\boldsymbol{A}\in R^{n\times n}$, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{ST}}=-\boldsymbol{A}$, 且 $\mu\mathrm{i}\,(\mu\neq 0)$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 $k$ ($k$ 为正整数) 重次特征值, 则必存在 $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\mu\mathrm{i}$ 的 $k$ 个线性无关的次特征向量.

证明　由于 $\mathrm{rank}(\mu\mathrm{i}\boldsymbol{J}-\boldsymbol{A})=\mathrm{rank}(\mu\mathrm{i}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{J}\boldsymbol{A})$, 所以由引理 1, 2 得

$$\mathrm{rank}(\mu\mathrm{i}\boldsymbol{J}-\boldsymbol{A})=n-k.$$

从而线性方程组:

$$(\mu\mathrm{i}\boldsymbol{J}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=0.$$

有 $k$ 个线性无关的解向量, 即 $\boldsymbol{A}$ 有属于 $\mu\mathrm{i}$ 的 $k$ 个线性无关的次特征向量.

综上所述得: $n$ 阶实反次对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 存在 $n$ 个线性无关的次特征向量.

定义 5　设 $\boldsymbol{A}\in P^{n\times n}$, 若存在数域 $P$ 上的数 $\lambda$ 与 $\mu$, 及数域 $P$ 上的 $n$ 维向量 $\xi$ 与 $\eta$ 使得: $\boldsymbol{A}\eta=\lambda\boldsymbol{J}\xi$, $\boldsymbol{A}\xi=\mu\boldsymbol{J}\eta$, 则称 $\lambda$ 与 $\mu$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的双重次特征值; $\xi$ 与 $\eta$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 $\lambda,\mu$ 的双重次特征向量.

不难证明下面的引理:

引理 3　设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶实反次对称矩阵, 且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\mu\mathrm{i}\boldsymbol{J}\boldsymbol{X}\,(\mu\neq 0)$, 记

$$\xi=\frac{\boldsymbol{X}+\overline{\boldsymbol{X}}}{2},\quad \eta=\frac{\boldsymbol{X}-\overline{\boldsymbol{X}}}{2\mathrm{i}},$$

则

$$\boldsymbol{A}\xi=-\mu\boldsymbol{J}\eta,\qquad \boldsymbol{A}\eta=\mu\boldsymbol{J}\xi,$$

且 $\xi$ 与 $\eta$ 正交.

定理 8　设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶实反次对称矩阵, 则必存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{ST}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\Lambda$, 其中 $\Lambda$ 是以 $\boldsymbol{A}$ 的次特征值的虚部和零为对角线上元素的对角矩阵.

证明　1) 不妨设 $\boldsymbol{A}$ 的所有共轭次特征值为 $\pm\mu_1\mathrm{i},\pm\mu_2\mathrm{i},\cdots\pm\mu_m\mathrm{i}$ (其中 $\mu_k\,(k=1,\cdots,m)$ 均为正数 $2m\leqslant n$, ), 且均为单的次特征值, 从而 $\boldsymbol{A}$ 有 $n-2m$ 个零次特征值, 对应于 $\mu_k\mathrm{i}$ 的 $\boldsymbol{A}$ 次特

征向量为$\boldsymbol{X}_k(k=1,2,\cdots,m)$，记

$$\xi_k=\frac{\boldsymbol{X}_k+\boldsymbol{X}_k}{2},\eta_k=\frac{\boldsymbol{X}_k-\boldsymbol{X}_k}{2\mathrm{i}},(k=1,\cdots,m)$$

其$\boldsymbol{A}$的零次特征值所对应的正交实次特征向量为$\boldsymbol{X}_{2m+1},\cdots\boldsymbol{X}_n$，则

$$\left(\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|}\cdots\frac{\xi_m}{\|\xi_m\|}\frac{\boldsymbol{X}_{2m+1}}{\|\boldsymbol{X}_{2m+1}\|}\cdots\frac{X_n}{\|X_n\|}\frac{\eta_m}{\|\eta_m\|}\cdots\frac{\eta_1}{\|\eta_1\|}\right),$$

即为所求的正交矩阵$\boldsymbol{P}$.

因此由引理3得:

$\boldsymbol{AP}=(-\mu_1\boldsymbol{J}\eta_1\cdots-\mu_m\boldsymbol{J}\eta_m\ 0,\cdots,0\ \mu_m\boldsymbol{J}\xi_m\cdots\mu_1\boldsymbol{J}\xi_1)=\boldsymbol{JPJ}\mathrm{diag}(-\mu_1\cdots-\mu_m\ 0\cdots0\ \mu_m\cdots\mu_1)$,

记$\boldsymbol{JPJ}\Lambda$. 所以$\boldsymbol{P}^{ST}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}^{ST}\boldsymbol{JPJ}\Lambda=\boldsymbol{J}^{-1}(\boldsymbol{P}^{T})\boldsymbol{PJ}\Lambda=\Lambda$.

2) 若$\mu$i为$\boldsymbol{A}$的$k$重次特征值，由定理7知：$\boldsymbol{A}$有属于$\mu$i的$k$个线性无关的次特征向量$\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_k$，用Schimidt正交法，将其正交化，可得与之等价的一个两两正交的次特征向量组，从而定理中的$\boldsymbol{P}$也存在.

定理证毕.

参考文献:


[1] 戴华. 矩阵论[M]. 北京: 科学出版社, 2001.

[2] 曹莉莉. 次厄米特矩阵的次正定性[J]. 重庆师范学院学报(自然科学版), 1996, (3): 24-27.

[3] 同济大学数学教研室. 线性代数[M]. 北京: 高等教育出版社, 1999.


# Diagonal One of Real Anti-sub-symmetric Matrix


TAO Xian-hua

(Department of Mathematics, Maoming College, Maoming 525000, China)



**Abstract**: The paper has discussed such problims as the properties of sub-eigenvalue and sub-eigenvector of real-anti-sub-symmetric matrix, and its diagonalization. Based on the above, the following result could be approached: If $\boldsymbol{A}$ is a real-anti-sub-symmetric matrix, then there exists a perpendicular matrix $\boldsymbol{P}$. Multiplied with $\boldsymbol{P}$ and its reversal $\boldsymbol{P}^{ST}$ from the right and the left respectively, the matrix will become a diagonalmatrix.



**Key words**: real anti-sub-symmetric matrix; sub-eigenvalue; sub-eigenvictor