第 15 卷　第 2 期
1998 年 6 月

广东工业大学学报
Journal of Guangdong University of Technology

Vol.15　No.2
June 1998

洗衣机洗衣程序的优化*

萧展辉[1)]　张　帅[2)]　孙永耀[1)]

广东工业大学 1) 计算机科学与工程系;2)电子与信息工程系,广州,510643

摘要　首先从洗涤原理的分析中得到洗涤效果的标准可用洗涤过程中污垢与衣物的分离程度来衡量,接着对洗涤效果的变化过程建立了模型. 论证了在达到一定效果的条件下,达到总用水量最少的洗衣轮数、每轮用水量. 最后综合耗电、对衣物磨损等其它因素给出了合理和实用的洗衣程序设计.

关键词　数学模型; 洗涤效果; 洗衣程序

中图资料法分类号　O29

1　问题重述

当前洗衣机在我国已非常普及,其洗衣用水在家庭用水中占有相当大的比例,而我国淡水资源有限,因此节约洗衣机用水十分重要. 题目要求我们为洗衣机设计一种洗衣程序,使得在满足一定洗涤效果的条件下总用水量最少.

在满足一定洗涤效果的条件下,使总用水量最少,实际上是一个多元目标的决策过程,要实现的目标有两个:洗涤效果与总用水量,而由题意可知总用水量为主要目标. 其中,洗涤效果可根据洗衣机的洗涤原理,通过洗衣机的洗净性能和漂洗性能定量的描述. 在洗衣过程中,它随着每轮注水量的不同而变化. 在洗涤效果一定的条件下,总用水量决定于洗涤轮数以及每轮用水量.

用数学描述为下列非线性规划问题[1].

$$\min V_{总}(n, v_i) \qquad \rho_n(n, v_i) < \rho_t \qquad (i = 1, 2, 3 \cdots n),$$

其中, n, v_i 为方案变量.

2　问题的假设

假设 1;题目的洗衣过程与典型贮水漂洗的方式相似,因此模型是针对贮水漂洗的方式而言.

假设 2:洗衣机洗衣过程中,洗涤时间足够充分,使洗衣液中的污垢与洗涤剂成分能均匀分布,则脱水后衣物上残留的洗衣液浓度与去除的洗衣液浓度是相同的,以及在衣量一定的情况下,每轮脱水后残留在衣物上的洗衣液质量相同.

假设 3:凡是在洗涤作用下能与衣物分离的污垢在洗涤过程中均能与衣物分离,而在漂洗过程中没有污垢与衣物分离.

假设 4:洗衣机在注水时能达到我们要求的注水量,不会产生偏差.

收稿日期:1997－07－09　　萧展辉　男　　在读学生

* 该文在 1996 年全国大学生数学建模竞赛中获省一等奖,全国二等奖. 指导教师:李大红　郭大昌　古伟清

3　模型的建立与分析

3.1　问题的转化

在达到一定洗衣效果的条件下,总用水量最小的问题可以转化成当总用水量一定,如何确定洗衣轮数与分配每轮注水量以达到最佳洗衣效果的问题.

洗衣效果中由洗净比 C 和漂洗比 F 来衡量[2],而 C 和 F 又可由洗衣液中污垢与洗涤剂浓度 ρ_t 来衡量[3], ρ_t 越低洗衣效果越好.因此,我们认为当 $\rho_n \leqslant \rho_t$ 时,可以达到洗衣效果,在漂洗过程中, ρ_n 与 ρ_{n-1} 存在如下关系:

$$\rho_n=\frac{m_{残}}{\upsilon_n+m_{残}}\cdot\rho_{n-1}.$$

另外,由于注水量受洗涤衣物多少与洗衣机洗涤容量限制,故有 $V_{\min}\leq V_{\mathrm{n}}\leq V_{\max}$,其中 $V_{\min}=V_0$, $V_{\max}=V_{缸}$.

所以我们可以得出以下的模型:

$$\rho_n=\frac{(m_{残})^n\cdot\rho_0}{\prod\limits_{i=1}^{n}(\upsilon_i+m_{残})},\quad \rho_n\leqslant\rho_t,\ \upsilon_{\min}\leqslant\upsilon_i\leqslant\upsilon_{\max},$$

其中, ρ_0——洗涤过程开始时洗涤液及衣物可溶于水的污垢溶于水后洗衣液的浓度; ρ_t——达到一定洗衣效果时洗衣液的浓度; n——漂洗轮数; V_i——i 轮漂洗时注水量; ρ_i——i 轮漂洗后洗衣液浓度; $V_{总}$——洗衣总用水量; $m_{残}$——洗涤物脱水后衣物上残留的洗涤液与污垢质量.

目标函数: $\min V_{总}=V_0+V_1+V_2+\cdots V_n$.

3.2　简化模型

在上述非线性规划问题中,我们可以证明如下定理:

定理　在漂洗过程中,在相同的洗衣效果下,当且仅当每轮注水量相同时,总漂洗用水量最少.

证明　假设,在总漂洗用水量一定的情况下,至少有两轮注水量不同,假定为 n 轮与 $n+1$ 轮不同,即 $V_n\neq V_{n+1}$

设 $V_n<V_{n+1}$, $V_{n+1}=V_n+\Delta V$,

由上可知:　$\rho_{\mathrm{n}}=\dfrac{m_{残}}{V_n+m_{残}}\cdot\rho_{n-1}$,

$$\rho_{\mathrm{n}+1}=\frac{m_{残}}{V_{n+1}+m_{残}}\cdot\rho_n=\frac{m_{残}^2}{(\upsilon_n+m_{残})\cdot(V_{n+1}+m_{残})}\cdot\rho_{n-1}.\tag{1}$$

又因为总漂洗用水量一定,使 n 轮与 $n+1$ 轮注水量从新分配,使得 $V_n{}'=V'_{n+1}=V_n+\Delta V/2$,同样应有:

$$\rho'_{n+1}=\frac{m_{残}^2}{(V'_{\mathrm{n}}+m_{残})\cdot(V'_{n+1}+m_{残})}\cdot\rho_{n-1}=\frac{m_{残}^2}{(V_n+\Delta V/2+\mathrm{m}_{残})^2}\cdot\rho_{n-1}.\tag{2}$$

从式(1)与式(2)易得:

$$\rho'_{n+1}<\rho_{n+1}.$$

则漂洗轮数相同情况下，每轮注水量相同时的洗衣效果最好，即可有如下等价命题：

当洗衣效果一定时，仅当每轮水量相同时总水量最少．

设漂洗过程中每轮注水量均为 V，在衣物量一定的情况下，V_0 为确定值，所以目标函数可以转化为求总漂洗用水量的最小值．则由以上定理，我们可以得出以下的简化模型：

$$\rho_n=\frac{m_{残}^{n}}{(m_{残}+V)^{n}}\cdot\rho_0 \qquad V_{\min}\leqslant V\leqslant V_{\max};\ \rho_n\leqslant\rho_t.$$

目标函数：$\min V_{总}'=n\cdot V$ $\qquad V_{总}'$——总漂洗用水量

3.3 求解模型

变换上述约束条件可得

$$\begin{cases} V_{总}'\geqslant m_{残}(\sqrt[n]{\rho_0/\rho_t}-1)\cdot n; \\ V_{\min}\cdot n\leqslant V_{总}'\leqslant V_{\max}\cdot n. \end{cases}$$

型：

根据约束条件，可画出待求解的可行域 K，如图1所示

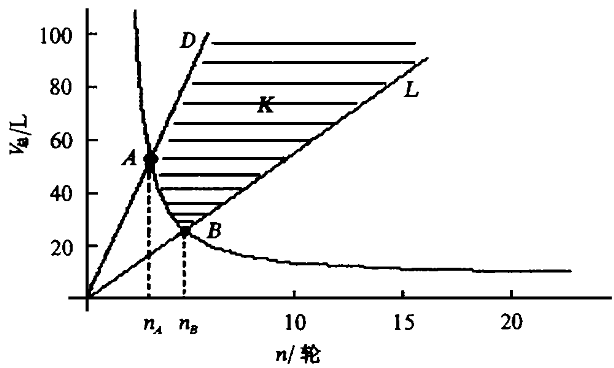

图1 解的可行域

求 $V_{总}'(n)=m_{残}[(\rho_0/\rho_t)^{1/n}-1]n$ 与 $V_{总}'(n)=V_{\max}n$ 的交点横座标：

$$n_A=\ln(\rho_0/\rho_t)/\ln(V_{\max}/m_{残}+1)$$

[它是 n 的可行域的下限]

求 $V_{总}'(n)=m_{残}[(\rho_0/\rho_t)^{1/n}-1]n$ 与 $V_{总}'(n)=V_{\min}n$ 的交点横座标：

$$n_B=\ln(\rho_0/\rho_t)/\ln(V_{\min}/m_{残}+1)$$

下面我们把 n 的可行域$[n_A,\infty)$分为$[n_A,n_B]$与(n_B,∞)两个区域来讨论，确定 n 以及 $V_{总}'$的最优解．然后比较两区域的最优解，得到整个可行域的最优解．

1)$[n_A,n_B]$区间内的可能最优解：

使用 Mathematical2.1 软件对函数 $V_{总}'(n)=m_{残}[(\rho_0/\rho_t)^{1/n}-1]n$ 在 $n\in[1,20]$区域内作图，该函数单调递减，考虑到现实生活中 n 不可能过大，函数 $V_{总}'(n)$在 $n\in[n_A,n_B]$区间内仍为单调递减．

设 n_i，n_j 为$[n_A,n_B]$内满足上述化简后约束条件的任两点，且 $n_I<n_j$，那么有

$$V_{总}'(n_i)>V_{总}'(n_j).$$

由于 n 为一离散值，故在$[n_A,n_B]$区域内，我们得到当 $n=[n_B]$[x]——为对 x 取整)时 $V_{总}'$为最少．

2)(n_B,∞)区间内的可能最优解：

3)在该区间内显然有 $V_{总}'$的最优解在直线 $V_{总}'=V_{min}n$ 上，因为该直线单调递增，故当 $n=[n_B]+1$ 时，V 为最小．

4)设函数 $V_{总}'(n)=m_{残}[(\rho_0/\rho_t)^{1/n}-1]n$，函数 $V_{总}''=V_{\min}n$.

在整个可行域 K 内，当 $V_{总}'([n_B])>V_{总}''([n_B]+1)$，则 $n=[n_B]+1$，$\min V_{总}'=V_{总}''([n_B]+1)$.

反之，当 $V_{总}'([n_B])<V_{总}''([n_B]+1)$时，则 $n=[n_B]$，$\min V_{总}'=V_{总}'([n_B])$.

以省水为目的，在满足洗衣机正常支作的前提下，使总用水量最低．可把最低注水量 V_0 分为 $V_{缸}/3$，$V_{缸}/2$ 和 $2V_{缸}/3$ 三种情况，根据衣物重量与注水量的参考公式 $V_0 = m_{衣}\alpha$，相对最低注水量 V_0 的三种情况对衣量的多少分为 3 个档次，它们分别为(参考数据)：

①$m_{衣} \leqslant 1$ kg；　②$1$ kg$< m_{衣} \leqslant 1.5$ kg；　③$1.5$ kg$< m_{衣} \leqslant 2$ kg

3.4　参考实例

下述各量对应单位为质量 m/kg，体积 V/L；脱水率 T 值参考文献[4]

$V_{\max} = 50$L，脱水率 $T = 50\%$，$\rho_0/\rho_t = 2500$，$\alpha = 20$.

①少衣物的情形：($m_{衣} = 1$)

$V_{\min} = V_0 = V_{\max}/3 = 50/3$

$m_{残} = (1/T - 1)m_{衣} = (2-1)\times 1 = 1$；

$n_B = \ln(\rho_0/\rho_t)/\ln(V_{\max}/m_{残} + 1) = 2.7$；

$[n_B] = 2$；

$V_{总}'([n_B]) = m_{残}[(\rho_0/\rho_t)^{1/2} - 1]\times 2 = 98$；

$V_{总}''([n_B]+1) = V_{\min}\times 3 = 50$.

因为 $V_{总}'([n_B]) > V_{总}''([n_B]+1)$

所以 $n = [n_B] + 1 = 3$

$\min V_{总}' = 50$　　$V = 50/3$　　$V_{总} = V_0 + V_{总}' = 66.7$

②多衣物的情形：($m_{衣} = 2$)；

$V_{\min} = V_0 = 2V_{max}/3 = 100/3$；

$m_{残} = (1/T - 1)m_{衣} = (2-1)\times 2 = 2$；

$n_B = 1n(\rho_0/\rho_t)/1n(V_{\min}/m_{残} + 1) = 2.7$；

$[n_B] = 2$；

$V_{总}'([n_B]) = m_{残}[(\rho_0/\rho_t)^{1/2} - 1]\times 2 = 196$；

$V_{总}''([n_B]+1) = V_{\min}\times 3 = 100$.

因为 $V_{总}'([n_B]) > V_{总}''([n_B]+1)$，

所以 $n = [n_B] + 1 = 3$，

$\min V_{总}' = 100$　　$V = 100/3$　　$V_{总} = V_0 + V_{总}' = 133.3$.

3.5　模型稳定性的分析

由于对洗涤效果的要求因人而异，但实际漂洗的轮数是有限的，在有限轮数漂洗后，能否满足一般人的洗涤要求，以下在实例①的基础上对该问题作粗略的分析．

根据我们的模型，漂洗效果可以用漂洗前后洗衣液污垢与洗涤剂浓 ρ 之比(ρ_0/ρ_t)来衡量．

若(ρ_0/ρ_t)为 10，只需漂洗 3 轮便可达到该漂洗效果．

若(ρ_0/ρ_t)为 100(近乎理想)，仍然只需漂洗 3 轮便可达到该漂洗效果．

上述结果表明，在漂洗有限轮数后，能基本上满足所有人的洗涤要求．而且，从另一角度也说明了我们的模型是稳定的，并不会因使用者的不同而产生很大的偏差．

3.6 层次分析法对模型的补充

人们使用洗衣机是为了获得好的洗衣效果，但同时也希望省水，省电，对衣物的磨损降到最低，而漂洗的轮数可为2～4轮，因此我们综合考虑各种因素的隶属关系，建立层次分析结构模型，并参考实例①，用层次分析法判断出最优漂洗轮数．

可供选择的方案有：进行2轮漂洗；进行3轮漂洗；时行4轮漂洗．所考虑的准层为节省月水、节省用电、洗衣效果，对衣物的磨损．层次分析结构模型如图2所示，判断矩阵见表1～表6，由表1可见判断矩阵具有满意的一致性．

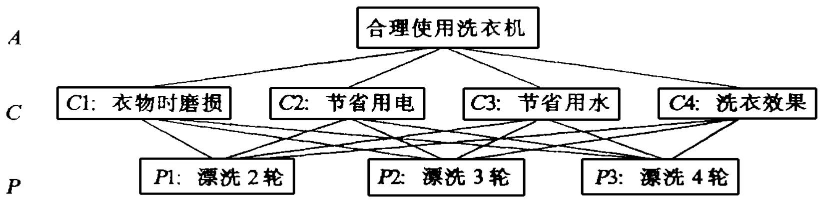

图2 层次分析结构模型

表1 判断矩阵 $A-C$

A	C_1	C_2	C_3	C_4	W
C_1	1	1/3	1/7	1/5	0.0625
C_2	3	1	3/7	3/5	0.1875
C_3	7	7/3	1	7/5	0.4378
C_4	5	5/3	5/7	1	0.3125

$\lambda_{max}=4.000012$，$RI=0.90$，$CI=6\times10^{-6}$，$CR=1.931\times10^{-4}<0.1$

表2 判断矩阵 C_1-P

C_1	P_1	P_2	P_3	W
P_1	1	5/3	5	0.5556
P_2	3/5	1	3	0.3333
P_3	1/5	1/3	1	0.1111

$\lambda_{max}=3.00004$，$RI=0.58$，$CI=2.001\times10^{-5}$，$CR=3.45\times10^{-5}<0.1$

表3 判断矩阵 C_2-P

C_2	P_1	P_2	P_3	W
P_1	1	9/7	9/5	0.4286
P_2	7/9	1	7/5	0.3333
P_3	5/9	5/7	1	0.2381

$\lambda_{max}=3.00002$，$RI=0.58$，$CI=1.12\times10^{-4}$，$CR=1.931\times10^{-4}<0.1$

表4 判断矩阵 C_3-P

C_3	P_1	P_2	P_3	W
P_1	1	6/8	6/5	0.3158
P_2	8/6	1	8/5	0.4211
P_3	5/8	5/6	1	0.2632

$\lambda_{max}=3.027$，$RI=0.58$，$CI=0.014$，$CR=0.024<0.1$

表5 判断矩阵 C_4-P

C_4	P_1	P_2	P_3	W
P_1	1	5/7	5/9	0.2381
P_2	7/5	1	7/9	0.3333
P_3	9/5	9/7	1	0.4286

$\lambda_{max}=3.000064$，$RI=0.58$，$CI=3.2\times10^{-5}$，$CR=5.52\times10^{-5}<0.1$

表6 总排序判断矩阵

层次 C	C_1	C_2	C_3	C_4	层次P总
	0.0625	0.1875	0.4375	0.3125	排序结果
P_1	0.5556	0.4286	0.3158	0.2381	0.3277
P_2	0.3333	0.3333	0.4211	0.3333	0.3717
P_3	0.1111	0.2381	0.2632	0.4286	0.3007

P_2——漂洗3轮的权值为0.3717，　P_1——漂洗3轮的权值为0.3277，　P_3——漂洗3轮的权值为0.3007

从判断矩阵可以得出优先采用漂洗轮数的次序为3轮(每轮注水量16.67 L),2轮(每轮注水量49 L),4轮(每轮注水量16.67 L). 同时发现2轮与3轮的差别较小,经过分析发觉在建立层次结构模型时,我们较注重洗衣效果,所以造成这样的结果. 如果加重省水省电的权重的话,那么得到的结果将是2轮,所以最后认为最佳轮数据应为2～3轮,对比目前市面上常用洗衣机的漂洗轮数也为2～3轮,与我们的答案是一致的.

3.7 洗衣程序

一般认为,洗衣时间越长,衣物就洗得越干净,其实不然,如果洗涤时间超过了规定时间,不但不会按比例地提高洗洗净率,还会加速衣物的磨损. 最佳洗涤时间是5～10 min,最长不要超过12 min[5].

同样漂洗时间也不是越长越好. 一般情况下,使用贮水方式操作时,每次3 min,漂洗2～3次就可以[5]. 另外,排水、脱水性能参考某种洗衣机,排水时间定为2.3 min,脱水时间为2.7 min.

综上所述得出洗衣程序如表7,表8.

表7　按档次选择注水量和漂洗轮次

档次	衣物量/kg	注水量/L	漂洗轮次
高档	1.5～2	30～40	3
中档	1～1.5	20～30	3
低档	≤1	15～20	3

表8　标准程序　　min

进水	洗衣	排水	脱水	进水	漂洗	排水	脱水	进水	漂洗	排水	脱水	进水	漂洗	排水	脱水
—	5～10	2.3	2.7	—	3	2.3	2.7	—	3	2.3	2.7	—	3	2.7	4.2

4 模型的评价

模型的优点在于我们从资料中找出了能正确衡量洗衣效果的参数,并建立了总用水量与洗衣轮数,每轮用水量间合理的函数关系. 在此基础上,对模型作进一步的讨论便可得到一系列可靠而实用的信息,并且,由于我们所得出的结论与客观事实很好的吻合,从而进一步说明我们模型是合理的.

模型的缺点在于未对洗衣机进行更全面更实际的讨论,例如各种不同洗涤方式与漂洗方式的洗衣机,从而可可能使我们的模型在应用上有一定的局限性.

模型的改进可以更加全面讨论不同的洗涤方式,如:溢流漂洗、喷淋漂洗、顶淋漂洗等. 从而提出更全面的模型以适应不同种类的洗衣机.

参　考　文　献

1 运筹学教材编写组. 运筹组. 北京:清华大学出版社,1990.136～138

2 陈永甫. 洗衣机的原理与维修. 北京:电子工业出版社,1992.1～6,336～337

3 [美]M.J希克. 纤维和纺织品的表面性能(下). 北京:纺织工业出版社,1984.37～48

4 王一群,黄省三. 新型洗衣机使用检修大全. 福建:福建科学技术出版社,1993.20～23

5 刘胜利. 家用洗衣机的工作原理与维修技术. 北京:新时代出版社,1993.14～15

(下转第86页)

computer science，1988.479～487

2 Kahn J D，Linial N，Nisan N，et al. On the cover time of random walks on graphs，J. Theorical Prob. 1989，2：121～128

3 Aleliunas R，Karp R. M，Lipron R J，et al. Random walks，universal sequences，and the complexity of Maze problems，Proc. of the 20th IEEE symposium on foundations of computer science，1979.218～233

4 Matthews P. Covering problems for brownian motion on spheres，Ann. Prob. 1988，16：189～199

5 Meze J E，Some extremal Markov chains，Bell syst. Tech. J，1982，61：2065～2080

6 Zuckerman D. Covering times of random walks on bounded degree trees and other graphs，J. Theorical Prob. 1989，2：147～157

7 Devroye L，Shili A. Random walks on highly symmetric graphs，J. Theoritical Prob.，1990，3：497～514

8 Broder A Z，Rarlin A R. Bounds on the cover time，J. Thoritical Prob，1989，2：101～120

On the Cover Time of Random Walks on Graphs

Zeng Wenqu[1)] Dai Liangui[2)]

1) Postgraduate Education Office，GDUT，Guangzhou 510090

2) Research Institute of CA，SCUT，Guangzhou，510641

Abstract The cover time of finite graphs，that is the expected time needed for a random walk on a finite graph to visit every vertex at least one times，are studied. An upper bound of $O(n\log n)$ for the expection of the cover time for complete graphs is given. And the bounds for the expected cover time for symmetric graphs are proved.

Key words random walks；general graph；complete graph；symmetric graph；cover time

---

（上接第79页）

Optimization of Washer Washing Program

Xiao Zhanhui[1)] Zhang Shuai[2)] Sun Yongyao[1)]

1) Dept. of Computer Science and Englieernig；

2) Dept. of Electronic and information Engineering，GDUT，Guangzhou，510643

Abstract Trom the analysis of washing principle，the standard of washing effect may be measured by the separate degree of dirt from clothes in washing process. And the mathematics model is set up form the change process of washing effect. Washing mumber of wimes and water amount each time are put forward and proved under the condition of reaching definite effect and making total water amouict least. Finally summing up power consumption，wear and tear to clothes and other factors，the reasonable practical program is advanced.

Key words mathematics model；washing effect；washing program

(Guide teacher：Li Dahone Guo Dachang Gu Wei qing)