

doi: 10.12052/gdutxb.190160

一类脉冲随机微分方程解的稳定性

黄慧敏, 郭承军

(广东工业大学 应用数学学院, 广东 广州 510520)

摘要: 通过运用不动点理论方法和Lyapunov稳定性定理, 研究了一类脉冲随机微分方程解的稳定性, 得到了该方程均方指数稳定的充分条件。

关键词: 不动点理论; Lyapunov泛函; 脉冲; 稳定性

中图分类号: O175 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-7162(2020)06-0056-07

Stability of Solutions for a Class of Impulsive Stochastic Differential Equations

Huang Hui-min, Guo Cheng-jun

(School of Applied Mathematics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510520, China)

Abstract: The stability of solutions of a class of impulsive stochastic differential equations was studied by using the fixed point theory and Lyapunov stability theorem and sufficient conditions for the exponential stability in the mean square of the equation are obtained.

Key words: fixed point theory; Lyapunov functional; impulsive; stability

近年来, 随机微分系统在遗传学、生态系统、自动控制等领域都有着广泛的应用^[1-3]。目前, 关于具有脉冲效应的随机微分方程的研究也吸引了很多学者的关注^[4-7]。文献[8]研究了一类随机微分方程解的稳定性, 文章首先给出了方程的温和解, 并运用压缩映射原理证明了方程的 p 阶矩指数稳定, 该文章没有考虑脉冲作用。文献[9]通过构造Lyapunov泛函, 研究了一类三阶时滞微分方程解的渐进稳定性和有界性, 得到了该方程渐进稳定和所有解有界的充分性条件。文献[10]利用Razumikhin技巧和Lyapunov函数研究了一类脉冲随机微分系统的全局指数稳定性。文献[11]研究了下列形式的脉冲随机微分方程

$$\begin{cases} dx(t) = f(x(t))dt + g(x(t))dw(t), t \neq t_k, t \geq t_0 \\ \Delta x(t_k) = I_k(x(t_k)), k \in N \end{cases}$$

得到了上述方程解的几乎必然指数稳定性。

本文主要通过运用不动点理论和Lyapunov稳定性定理研究如下的脉冲随机微分方程的稳定性, 得到了方程解均方指数稳定的结论。

$$\begin{cases} d[x(t) - cx(t - \tau)] = [-(A + \Delta A(t))x(t) + f(t, x(t), \\ \quad x(t - \tau))]dt + \sigma(t, x(t), x(t - \tau))dw(t), t \geq 0, t \neq t_k \\ x(t_k) = I_k(x(t_k^-)), k \in N \\ x(s) = \varphi(s) \in D_{\mathcal{F}_0}^b([-\tau, 0], H) \end{cases}$$

1 预备知识

设 $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ 是一个具有 σ 流 $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ 的完备概率空间, 满足通常的条件, 即右连续和 $\mathcal{F}_0$ 包含所有的 P -零测集。设 H, K 是两个实值可分的希尔伯特空间, 它们的范数分别记作 $\|\cdot\|_H, \|\cdot\|_K$ 。 $\mathcal{L}(K, H)$ 是从空间 K 到 H 的所有有界线性算子的集合。 $D := D_{\mathcal{F}_0}^b([-\tau, 0]; H)$ 表示从 $[-\tau, 0]$ 到 H 的所有有界 $\mathcal{F}_0$ 可测函数的全体, $\|\varphi\|_D = \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} E\|\varphi(\theta)\|_H$ 。

假设 $\{W(t), t \geq 0\}$ 是定义在 $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ 空间的一个 K -值Wiener过程, 并且具有协方差算子 Q 。对任意 $x, y \in K$, $E\langle W(t), x \rangle_K \langle W(s), y \rangle_K = (t \wedge s) \langle Qx, y \rangle_K$ 。令 $W(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} B_i^t e_i$, 这里 $\lambda_i \geq 0, i \in N$ 是 Q 的特征值; $e_i \geq 0, i \in N$ 是相应的特征向量; $B_i^t \geq 0, i \in N$ 是独立的

布朗运动序列。希尔伯特空间 K 的子空间 $K_0 = Q^{1/2}(K)$, 其内积为 $\langle u, v \rangle_{K_0} = \langle Q^{-1/2}u, Q^{-1/2}v \rangle_K$ 。

设 $L_2^0 = L_2(K_0, H)$ 表示所有从 K_0 到 H 的希尔伯特-施密茨算子空间, 具有范数:

$$\|\Psi\|_{L_2^0}^2 = \text{tr}((\Psi Q^{1/2})(\Psi Q^{1/2})^*), \Psi \in L_2^0$$

考虑如下的脉冲随机微分方程解的稳定性,

$$\begin{cases} d[x(t) - cx(t-\tau)] = [-(A + \Delta A(t))x(t) + f(t, x(t), x(t-\tau))]dt + \\ \quad \sigma(t, x(t), x(t-\tau))dw(t), t \geq 0, t \neq t_k \\ x(t_k) = I_k(x(t_k^-)), k \in \mathbb{N} \\ x(s) = \varphi(s) \in D_{\mathcal{F}_0}^b([-\tau, 0], H) \end{cases} \quad (\text{DW})$$

其中 $f: R_+ \times H \times H \rightarrow H, \sigma: R_+ \times H \times H \rightarrow L(K, H)$ 是希尔伯特空间中的Borel可测函数, $|c| < 1$ 是常数, A 是有界线性算子半群 $S(t), t \geq 0$ 的无穷小生成元。 $x(t)$ 代表在 t 时刻的细胞数量, $x(t) > 0$ 。脉冲时刻 t_k 满足 $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$ 。 $I_k: H \rightarrow H$ 表示 $x(t)$ 在 t_k 时刻的脉冲扰动, $x(t_k^-)$ 代表 $x(t)$ 在 $t = t_k$ 时的左极限。

定义1 如果方程(DW)存在解 $x(t)$, 且存在一对正常数 μ 和 η , 使得

$$E|x(t)|^2 \leq \mu E\|\varphi\|^2 e^{-\eta t}, t \geq 0$$

则称方程(DW)的解是均方指数稳定的。

定义2 随机过程 $\{x(t), t \in [0, T], 0 \leq T < \infty\}$ 称为方程(DW)的温和解, 如果下列条件满足:

- (1) $x(t)$ 是 $\mathcal{F}_t, t \geq 0$ 适应的;
- (2) 对任何 $t \in [0, T], x(t)$ 都满足积分方程

$$\begin{aligned} x(t) = & S(t)[\varphi(0) - c\varphi(-\tau)] + cx(t-\tau) + \\ & \int_0^t (A + \Delta A(s))S(t-s)cx(s-\tau)ds + \\ & \int_0^t S(t-s)f(s, x(s), x(s-\tau))ds + \\ & \int_0^t S(t-s)\sigma(s, x(s), x(s-\tau))dw(s) + \\ & \sum_{0 < t_k < t} S(t-t_k)I_k(x(t_k^-)) \end{aligned} \quad (1)$$

引入如下条件:

(H₁) A 是希尔伯特空间 H 中有界线性算子半群 $\{S(t), t \geq 0\}$ 的无穷小生成元, 且对一些常数 $\gamma > 0$ 和 $M \geq 1$, 有 $\|S(t)\|_H \leq Me^{-\gamma t}, t \geq 0$ 。

(H₂) 函数 f 和 σ 满足利普希茨条件, 即存在常数 K_1, K_2 , 对任意 $x, \bar{x}, y, \bar{y} \in H$ 和 $t \geq 0$, 有

$$|f(t, x, y) - f(t, \bar{x}, \bar{y})|^2 \leq K_1(|x - \bar{x}|^2 + |y - \bar{y}|^2), K_1 > 0 \quad (2)$$

$$|\sigma(t, x, y) - \sigma(t, \bar{x}, \bar{y})|^2 \leq K_2(|x - \bar{x}|^2 + |y - \bar{y}|^2), K_2 > 0 \quad (3)$$

$f(t, 0, 0) = \sigma(t, 0, 0) = 0$, 且 $I_k(0) = 0, (k = 1, 2, \dots)$, 则方程(DW)有平凡解 $x(t) \equiv 0$ 。

(H₃) 存在 $\alpha \in [0, 1]$, 使得对任意 $t \geq 0$, 有

$$\begin{aligned} & |[-(A + \Delta A(s))]^\alpha cx(t-\tau) - [-(A + \Delta A(s))]^\alpha cy(t-\tau)|_H \leq \\ & K_3|x-y|_H, K_3 > 0 \end{aligned} \quad (4)$$

(H₄) $I_k \in C(H, H)$, 且存在常数 q_k , 使得

$$|I_k(x) - I_k(y)|_H \leq q_k|x-y|_H \quad (5)$$

引理1^[12] 对任意 $r \geq 1$ 和 L_2^0 -值可料过程 $\Phi(\cdot)$ 有

$$\sup_{s \in [0, t]} E \left\| \int_0^s \Phi(u) dw(u) \right\|_H^{2r} \leq (r(2r-1))^r \left(\int_0^t (E \|\Phi(s)\|_{L_2^0}^{2r})^{1/r} ds \right)^r$$

引理2^[13] 假设条件(H₁)成立, 则对任意 $\beta \geq 0$, 有

(i) $S(t)(-A)^\beta x = (-A)^\beta S(t)x$;

(ii) 存在正常数 $M_\beta > 0$, 使得

$$\|(-A)^\beta S(t)\| \leq M_\beta t^{-\beta} e^{-\gamma t}, t > 0$$

2 主要结果

定理1 假设条件(H₁)~(H₄)成立, 且对 $\alpha \in (1/2, 1)$, 满足

$$\begin{aligned} & |c| + K_3^2 M_{1-\alpha}^2 \gamma^{-2\alpha} \Gamma(2\alpha-1) + \int_0^t K_1 M^2 e^{-2\gamma(t-s)} ds + \\ & \int_0^t K_2 M^2 e^{-2\gamma(t-s)} ds + \tilde{L} < \frac{1}{6} \end{aligned} \quad (6)$$

则方程(DW)是均方指数稳定的, 其中 $\Gamma(\cdot)$ 是伽马函数, $\tilde{L} = M^2 e^{-2\gamma T} E \left(\sum_{k=1}^m |q_k|_H^2 \right)$ 。

证明 定义算子 $\Phi: H \rightarrow H$, 当 $t \in [-\tau, 0]$ 时, $\Phi(x)(t) = \varphi(t), \|x\|_H := \sup_{t \geq 0} E|x(t)|_H^2$, 且存在常数 $M^* > 0, \eta > 0$, 使得 $E|x(t)|_H^2 < M^* E|\varphi|_D^2 e^{-\eta t}, t > 0$ 。

当 $t \geq 0$ 时,

$$\begin{aligned} \Phi(x)(t) := & S(t)[\varphi(0) - c\varphi(-\tau)] + cx(t-\tau) + \\ & \int_0^t (A + \Delta A(s))S(t-s)cx(s-\tau)ds + \\ & \int_0^t S(t-s)f(s, x(s), x(s-\tau))ds + \\ & \int_0^t S(t-s)\sigma(s, x(s), x(s-\tau))dw(s) + \\ & \sum_{0 < t_k < t} S(t-t_k)I_k(x(t_k^-)) := \sum_{i=1}^6 F_i(t) \end{aligned} \quad (7)$$

先证 Φ 是均方连续的, 令 $x \in H, t_1 \geq 0$, 且 $|r|$ 足够小。

$$E|\Phi(x)(t_1+r) - \Phi(x)(t_1)|_H^2 \leq$$

$$6 \sum_{i=1}^6 E|F_i(t_1+r) - F_i(t_1)|_H^2 \quad (8)$$

易证当 $r \rightarrow 0$ 时,

$$E|F_i(t_1+r) - F_i(t_1)|_H^2 \rightarrow 0, i = 1, 2, 3, 4, 6 \quad (9)$$

$$E|F_5(t_1+r) - F_5(t_1)|_H^2 \leq$$

$$2 \int_0^{t_1} E|(S(t_1+r-s) - S(t_1-s))\sigma(s, x(s), x(s-\tau))|_H^2 ds +$$

$$2 \int_{t_1}^{t_1+r} E|S(t_1+r-s)\sigma(s, x(s), x(s-\tau))|_H^2 ds$$

$$\text{因此当 } r \rightarrow 0 \text{ 时, } E|F_5(t_1+r) - F_5(t_1)|_H^2 \rightarrow 0 \quad (10)$$

下证 $\Phi(H) \subset H$, 令 $x \in H$, 有

$$E|\Phi(x)(t)|_H^2 \leq 6E|S(t)[\varphi(0) - c\varphi(-\tau)]|_H^2 + 6E|cx(t-\tau)|_H^2 +$$

$$6E\left|\int_0^t (A + \Delta A(s))S(t-s)cx(s-\tau)ds\right|_H^2 +$$

$$6E\left|\int_0^t S(t-s)f(s, x(s), x(s-\tau))ds\right|_H^2 +$$

$$6E\left|\int_0^t S(t-s)\sigma(s, x(s), x(s-\tau))dw(s)\right|_H^2 +$$

$$6 \sum_{0 < t_k < t} E|S(t-t_k)I_k(x(t_k^-))|_H^2 =$$

$$J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5 + J_6 \quad (11)$$

由条件(H₁)有, 当 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$J_1 \leq 6M^2 e^{-2\gamma t} (1+c)^2 \|\varphi\|_D^2 \rightarrow 0 \quad (12)$$

由 $x(t) \in H$ 得, 当 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$J_2 \leq 6|c|E|x(t-\tau)|_H^2 \rightarrow 0 \quad (13)$$

由条件(H₃)和引理2得

$$J_3 = 6E\left|\int_0^t (A + \Delta A(s))S(t-s)cx(s-\tau)ds\right|_H^2 \leq$$

$$6E\left[\int_0^t |[-(A + \Delta A(s))]^{1-\alpha} S(t-s)[-(A + \Delta A(s))]^\alpha\right.$$

$$\left. cx(s-\tau)|_H ds\right]^2 \leq 6E\left[\int_0^t K_3 \frac{M_{1-\alpha} e^{-\gamma(t-s)}}{(t-s)^{1-\alpha}} |x(s-\tau)|_H ds\right]^2 \leq$$

$$6K_3^2 M_{1-\alpha}^2 \gamma^{1-2\alpha} \Gamma(2\alpha-1) \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} E|x(s-\tau)|_H^2 ds$$

由于 $x(t) \in H$, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $t_1 > 0$, 使得 $t \geq t_1$ 时, 则有 $E|x(t)|^2 < \varepsilon$, $E|x(t-\tau)|_H^2 < \varepsilon$ 。

$$6E\left|\int_0^t (A + \Delta A(s))S(t-s)cx(s-\tau)ds\right|_H^2 \leq$$

$$6K_3^2 M_{1-\alpha}^2 \gamma^{1-2\alpha} \Gamma(2\alpha-1) \int_0^{t_1} e^{-\gamma(t-s)} E|x(s-\tau)|_H^2 ds +$$

$$6K_3^2 M_{1-\alpha}^2 \gamma^{1-2\alpha} \Gamma(2\alpha-1) \int_{t_1}^t e^{-\gamma(t-s)} E|x(s-\tau)|_H^2 ds \leq$$

$$6K_3^2 M_{1-\alpha}^2 \gamma^{1-2\alpha} \Gamma(2\alpha-1) \int_0^{t_1} e^{-\gamma(t-s)} E|x(s-\tau)|_H^2 ds +$$

$$6K_3^2 M_{1-\alpha}^2 \gamma^{-2\alpha} \Gamma(2\alpha-1) \varepsilon$$

当 $t \rightarrow \infty$ 时, $e^{-\gamma t} \rightarrow 0$, 结合条件(6), 存在 $t_2 > t_1$, 使得对任意 $t \geq t_2$, 有

$$6K_3^2 M_{1-\alpha}^2 \gamma^{1-2\alpha} \Gamma(2\alpha-1) \int_0^{t_1} e^{-\gamma(t-s)} E|x(s-\tau)|_H^2 ds \leq \varepsilon - 6K_3^2 M_{1-\alpha}^2 \gamma^{-2\alpha} \Gamma(2\alpha-1) \varepsilon$$

因此, 对任意 $t \geq t_2$, 有

$$6E\left|\int_0^t (A + \Delta A(s))S(t-s)cx(s-\tau)ds\right|_H^2 < \varepsilon$$

也就是当 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$6E\left|\int_0^t (A + \Delta A(s))S(t-s)cx(s-\tau)ds\right|_H^2 \rightarrow 0 \quad (14)$$

$$J_4 = 6E\left|\int_0^t S(t-s)f(s, x(s), x(s-\tau))ds\right|_H^2 \leq$$

$$6E\int_0^{t_1} M^2 e^{-2\gamma(t-s)} K_1(|x(s)|_H^2 + |x(s-\tau)|_H^2) ds +$$

$$6E\int_{t_1}^t M^2 e^{-2\gamma(t-s)} K_1(|x(s)|_H^2 + |x(s-\tau)|_H^2) ds \leq$$

$$6E(\sup_{-\tau \leq s \leq t_1} |x(s)|^2) M^2 K_1 \int_0^{t_1} e^{-2\gamma(t-s)} ds +$$

$$6\varepsilon M^2 K_1 \int_{t_1}^t e^{-2\gamma(t-s)} ds \quad (15)$$

由条件(6)得, 存在 $t_2 > t_1$, 使得 $t \geq t_2$ 时, 有

$$6E(\sup_{-\tau \leq s \leq t_1} |x(s)|^2) M^2 K_1 \int_0^{t_1} e^{-2\gamma(t-s)} ds <$$

$$\varepsilon - 6\varepsilon M^2 K_1 \int_{t_1}^t e^{-2\gamma(t-s)} ds \quad (16)$$

根据式(15)和式(16)可知, 对任意 $t \geq t_2$, 有

$$6E\left|\int_0^t S(t-s)f(s, x(s), x(s-\tau))ds\right|_H^2 < \varepsilon$$

所以当 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$6E\left|\int_0^t S(t-s)f(s, x(s), x(s-\tau))ds\right|_H^2 \rightarrow 0 \quad (17)$$

同理对任意 $x(t) \in H$, 利用条件(H₂)及引理1, 有

$$J_5 = 6E\left|\int_0^t S(t-s)\sigma(s, x(s), x(s-\tau))dw(s)\right|_H^2 \leq$$

$$6E\int_0^{t_1} M^2 e^{-2\gamma(t-s)} K_2(|x(s)|_H^2 + |x(s-\tau)|_H^2) ds +$$

$$6E\int_{t_1}^t M^2 e^{-2\gamma(t-s)} K_2(|x(s)|_H^2 + |x(s-\tau)|_H^2) ds \leq$$

$$6E(\sup_{-\tau \leq s \leq t_1} |x(s)|^2) M^2 K_2 \int_0^{t_1} e^{-2\gamma(t-s)} ds +$$

$$6\varepsilon M^2 K_2 \int_{t_1}^t e^{-2\gamma(t-s)} ds$$

所以存在 $t_2 > t_1$, 使得 $t \geq t_2$ 时, 有

$$6E(\sup_{-\tau \leq s \leq t_1} |x(s)|^2) M^2 K_2 \int_0^{t_1} e^{-2\gamma(t-s)} ds \leq$$

$$\varepsilon - 6\varepsilon M^2 K_2 \int_{t_1}^t e^{-2\gamma(t-s)} ds$$

因此当 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$6E \left| \int_0^t S(t-s)\sigma(s, x(s), x(s-\tau))dw(s) \right|_H^2 \rightarrow 0 \quad (18)$$

$$J_6 = 6 \sum_{0 < t_k < t} E |S(t-t_k)I_k(x(t_k^-))|_H^2 \leq$$

$$6M^2 e^{-2\gamma t} \left(\sum_{k=1}^m |q_k|_H^2 \right) E |x(t_k^-)|_H^2$$

所以当 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$J_6 = 6 \sum_{0 < t_k < t} E |S(t-t_k)I_k(x(t_k^-))|_H^2 \rightarrow 0 \quad (19)$$

综上, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $E|\Phi(x)(t)|_H^2 \rightarrow 0$, 所以 $\Phi(H) \subset H$.

最后证明映射 $\Phi: H \rightarrow H$ 是压缩的, 对任意

$x, y \in H, s \in [0, T]$, 有

$$\sup_{s \in [0, T]} E |\Phi(x)(t) - \Phi(y)(t)|_H^2 \leq$$

$$5 \sup_{s \in [0, T]} \left\{ |c| E |x(t-\tau) - y(t-\tau)|_H^2 + \right.$$

$$K_3^2 M_{1-\alpha}^2 \gamma^{-2\alpha} \Gamma(2\alpha-1) E |x(s-\tau) - y(s-\tau)|_H^2 +$$

$$\int_0^t K_1 M^2 e^{-2\gamma(t-s)} E (|x(s) - y(s)|_H^2 +$$

$$|x(s-\tau) - y(s-\tau)|_H^2) ds +$$

$$\int_0^t K_2 M^2 e^{-2\gamma(t-s)} E (|x(s) - y(s)|_H^2 +$$

$$|x(s-\tau) - y(s-\tau)|_H^2) ds +$$

$$M^2 e^{-2\gamma t} \left(\sum_{k=1}^m |q_k|_H^2 \right) E |x(t_k^-) - y(t_k^-)|_H^2 \leq$$

$$5 \left(\sup_{s \in [0, T]} E |x(t) - y(t)|_H^2 \right) \left\{ |c| + K_3^2 M_{1-\alpha}^2 \gamma^{-2\alpha} \Gamma(2\alpha-1) + \right.$$

$$\int_0^t K_1 M^2 e^{-2\gamma(t-s)} ds +$$

$$\left. \int_0^t K_2 M^2 e^{-2\gamma(t-s)} ds + \tilde{L} \right\}$$

这里 $\tilde{L} = M^2 e^{-2\gamma T} E \left(\sum_{k=1}^m |q_k|_H^2 \right)$. 因此映射 Φ 是压缩

的, 由压缩映射原理得, Φ 在空间 H 中有不动点 $x(t)$, 它是方程(DW)的解, 且当 $s \in [-\tau, 0]$ 时, $x(s) = \varphi(s)$, $t \rightarrow \infty$ 时, $E|x(t)|_H^2 \rightarrow 0$, 所以定理1得证。

假定 $C^{2,1}(R^n \times R_+; R_+)$ 表示所有非负函数族 $V(x, t)$ 在 $R^n \times R_+$ 上关于 x 是连续两次可微分的, 对 t 是一次可微分的. 若 $V(x, t) \in C^{2,1}(R^n \times R_+; R_+)$, 定义算子 $LV: R^n \times R^n \times R_+ \rightarrow R$ 为

$$LV(x, y, t) = V_t(x - cy, t) + V_x(x - cy, t)[- (A + \Delta A(t))x(t) + f(t, x, y)] + \frac{1}{2} \text{trace} \left[\sigma^T(t, x, y) V_{xx}(x - cy, t) \sigma(t, x, y) \right]$$

其中

$$V_t = \frac{\partial V}{\partial t}, V_x = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right), V_{xx} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{n \times n}$$

引理3^[14] 设 $a, b \in R^n$ 及 $0 < \varepsilon < 1$, 则

$$|a + b|^2 \leq \frac{|a|^2}{1 - \varepsilon} + \frac{|b|^2}{\varepsilon}$$

引理4^[15] 假设 $\beta > 0, 0 < h < \varepsilon < 1, \lambda > 0, x(t), -\tau \leq t < \infty$ 是一个满足 $\sup_{-\tau \leq t < \infty} E|x(t)|^2 < \infty$ 的 n 维随机过程且满足

$$\begin{aligned} E|cx(t-\tau)|^2 &\leq h \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} E|x(t+\theta)|^2 \\ E|x(t) - cx(t-\tau)|^2 &\leq \lambda e^{-\beta t}, t \geq 0 \end{aligned} \quad (20)$$

则

$$E|x(t)|^2 \leq N e^{-(\beta \wedge \alpha)t} \quad (21)$$

其中

$$N = \left(\frac{\lambda}{(1-\varepsilon)^2} e^{\beta\tau} + \frac{h}{\varepsilon} e^{(\beta \wedge \alpha)\tau} \varphi_0 \right) \left(1 - \frac{h}{\varepsilon} e^{(\beta \wedge \alpha)\tau} \right)^{-1}$$

$$\alpha = \frac{1}{\tau} \ln \frac{\varepsilon}{h}, \varphi_0 = \sup_{-\tau \leq t \leq 0} |x(t)|^2$$

定理2 若存在函数 $V \in C^{2,1}(R^n \times R_+; R_+)$, 正常数 c_1, c_2, λ, q , 常数 β^* 以及非负常数 $\tilde{\beta}$, 且存在函数 $u_1, u_2, \dots, u_i, \dots$, 其中 $u_i > 1, i \in N$, 使得下列条件成立:

1) $c_1 |x(t) - cx(t-\tau)|^2 \leq V(x(t) - cx(t-\tau), t) \leq c_2 |x(t) - cx(t-\tau)|^2$;

2) $E|cx(t-\tau)|^2 \leq \tilde{c} \|\varphi\|^2$, 其中 $0 < \tilde{c} < 1, \|\varphi\| = \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} E|x(t+\theta)|$;

3) $ELV(x(t) - cx(t-\tau), t) \leq \beta^* EV(x(t) - cx(t-\tau), t)$;

4) $EV(x(t_i) - cx(t_i-\tau), t_i) \leq d_i EV(x(t_i^-) - cx(t_i^- - \tau), t_i^-)$,

其中 $0 < d_i < 1$;

5) $EV(x(t_i + \tau) - cx(t_i), t_i + \tau) \leq u_i d_i EV(x(t_i^- + \tau) - cx(t_i^-), t_i^- + \tau)$, 其中 $0 < u_i d_i < 1$;

6) $q > e^{(\lambda + \tilde{\beta})\rho}, \tilde{\beta}\rho \geq \sup_{t \geq t_0} \int_t^{t+\rho} \beta^* ds$, 这里 $\rho = \sup_{k \in N} \{t_k - t_{k-1}\}$.

则方程(DW)的解均方指数稳定。

证明 假设 $t_k - t_{k-1} > \tau, k = 1, 2, \dots$, 令 $w(t) = e^{\lambda(t-t_0)} V(x(t) - cx(t-\tau), t)$. 下面将证明

$$Ew(t) \leq c_2 M \|\varphi\|^2, t \geq t_0 \quad (22)$$

$$\begin{aligned} Ew(t_0) &= EV(x(t_0) - cx(t_0 - \tau), t_0) \leq \\ &c_2 |x(t_0) - cx(t_0 - \tau)|^2 \leq \\ &c_2 \left[\frac{|x(t_0)|^2}{1 - \varepsilon} + \frac{|cx(t_0 - \tau)|^2}{\varepsilon} \right] \leq \\ &c_2 \left(\frac{\|\varphi\|^2}{1 - \varepsilon} + \frac{\tilde{c} \|\varphi\|^2}{\varepsilon} \right) = \\ &c_2 M \|\varphi\|^2 \end{aligned}$$

其中 $M = \left(\frac{1}{1 - \varepsilon} + \frac{\tilde{c}}{\varepsilon} \right)$.

下面证明

$$Ew(t) \leq c_2 M \|\varphi\|^2, t \in (t_0, t_1) \quad (23)$$

运用反证法, 假若存在 $t \in (t_0, t_1)$, 使得 $Ew(t) \geq c_2 M \|\varphi\|^2$ 。定义 $t^* = \inf\{t \in [t_0, t_1] : Ew(t) \geq c_2 M \|\varphi\|^2\}$ 。因为 $Ew(t)$ 在 $t \in (t_0, t_1)$ 上连续, 所以有 $t^* \in (t_0, t_1)$, $Ew(t^*) = c_2 M \|\varphi\|^2$ 。定义 $t^{**} = \sup\{t \in [t_0, t^*] : Ew(t) \leq \frac{1}{q} c_2 M \|\varphi\|^2\}$, 故 $t^{**} \in (t_0, t^*)$, $Ew(t^{**}) = \frac{1}{q} c_2 M \|\varphi\|^2$ 。

对任意 $t \in [t^{**}, t^*]$, 由 Itô 微分公式和条件3) 得

$$\begin{aligned} ELw(t) &= \lambda e^{\lambda(t-t_0)} V(x(t) - cx(t-\tau), t) + \\ &\quad e^{\lambda(t-t_0)} ELV(x(t) - cx(t-\tau), t) \leq \\ &\quad (\lambda + \beta^*) Ew(t) \end{aligned}$$

由 Gronwall 不等式可得 $Ew(t^*) \leq Ew(t^{**})$
 $e^{\int_{t^{**}}^{t^*} (\lambda + \beta^*) ds} \leq \frac{1}{q} c_2 M \|\varphi\|^2 e^{(\lambda + \beta^*) \rho} \leq c_2 M \|\varphi\|^2$ 。得出矛盾, 所以式(23)成立。

$$\begin{aligned} Ew(t_1) &\leq d_1 e^{\lambda(t_1-t_0)} EV(x(t_1^-) - cx(t_1^- - \tau), t_1^-) \leq \\ &\quad d_1 c_2 M \|\varphi\|^2 \end{aligned} \quad (24)$$

下证当 $t \in (t_1, t_1 + \tau)$ 时,

$$Ew(t) \leq d_1 c_2 M \|\varphi\|^2 \quad (25)$$

反证, 假若存在 $t \in (t_1, t_1 + \tau)$, 使得 $Ew(t) \geq d_1 c_2 M \|\varphi\|^2$ 。定义 $t^* = \inf\{t \in [t_1, t_1 + \tau] : Ew(t) \geq d_1 c_2 M \|\varphi\|^2\}$ 。因为 $Ew(t)$ 在 $t \in (t_1, t_1 + \tau)$ 上连续, 故 $t^* \in (t_1, t_1 + \tau)$, $Ew(t^*) = d_1 c_2 M \|\varphi\|^2$ 。定义 $t^{**} = \sup\{t \in [t_1, t^*] : Ew(t) \leq \frac{1}{q} d_1 c_2 M \|\varphi\|^2\}$, 则 $t^{**} \in (t_1, t^*)$, $Ew(t^{**}) = \frac{1}{q} d_1 c_2 M \|\varphi\|^2$ 。因为对任意 $t \in [t^{**}, t^*]$, 由 Itô 微分公式和条件3) 有 $ELw(t) \leq (\lambda + \beta^*) Ew(t)$, 则由 Gronwall 不等式可得

$$\begin{aligned} Ew(t^*) &\leq Ew(t^{**}) e^{\int_{t^{**}}^{t^*} (\lambda + \beta^*) ds} \leq \\ &\quad \frac{1}{q} d_1 c_2 M \|\varphi\|^2 e^{(\lambda + \beta^*) \rho} \leq d_1 c_2 M \|\varphi\|^2 \end{aligned}$$

这是个矛盾, 所以式(25)成立。

$$\begin{aligned} Ew(t_1 + \tau) &\leq u_1 d_1 e^{\lambda(t_1 + \tau - t_0)} EV(x(t_1^- + \tau) - cx(t_1^-), t_1^- + \tau) \leq \\ &\quad u_1 d_1^2 c_2 M \|\varphi\|^2 \end{aligned} \quad (26)$$

当 $t \in (t_1 + \tau, t_2)$ 时, 运用反证法同理可得

$$Ew(t) \leq u_1 d_1^2 c_2 M \|\varphi\|^2 \quad (27)$$

当 $t = t_2$ 时, 利用条件4) 可得

$$Ew(t_2) \leq d_2 u_1 d_1^2 c_2 M \|\varphi\|^2 \quad (28)$$

假设当 $t \in (t_{k-1} + \tau, t_k)$ 时, $Ew(t) \leq \prod_{i=1}^{k-1} u_i \prod_{i=1}^{k-1} d_i^2 c_2 M \|\varphi\|^2$ 成立, 则可证得

$$Ew(t_k) \leq d_k \prod_{i=1}^{k-1} u_i \prod_{i=1}^{k-1} d_i^2 c_2 M \|\varphi\|^2 \quad (29)$$

当 $t \in (t_k, t_k + \tau)$ 时, 运用反证法可证得

$$Ew(t) \leq d_k \prod_{i=1}^{k-1} u_i \prod_{i=1}^{k-1} d_i^2 c_2 M \|\varphi\|^2 \quad (30)$$

$$\begin{aligned} Ew(t_k + \tau) &\leq u_k d_k e^{\lambda(t_k + \tau - t_0)} EV(x(t_k^- + \tau) - cx(t_k^-), t_k^- + \tau) \leq \\ &\quad \prod_{i=1}^k u_i \prod_{i=1}^k d_i^2 c_2 M \|\varphi\|^2 \end{aligned} \quad (31)$$

当 $t \in (t_k + \tau, t_{k+1})$ 时, 假若存在 $t \in (t_k + \tau, t_{k+1})$, 使得

$$\begin{aligned} Ew(t) &\geq \prod_{i=1}^k u_i \prod_{i=1}^k d_i^2 c_2 M \|\varphi\|^2, \text{定义 } t^* = \inf\left\{t \in [t_k + \tau, t_{k+1}] : \right. \\ &\quad \left. Ew(t) \geq \prod_{i=1}^k u_i \prod_{i=1}^k d_i^2 c_2 M \|\varphi\|^2\right\}。因为 Ew(t) 在 } t \in (t_k + \tau, t_{k+1}) \text{ 上连续, 故 } Ew(t^*) = \prod_{i=1}^k u_i \prod_{i=1}^k d_i^2 c_2 M \|\varphi\|^2。 \end{aligned}$$

定义

$$t^{**} = \sup\left\{t \in [t_k + \tau, t^*] : Ew(t) \leq \frac{1}{q} \prod_{i=1}^k u_i \prod_{i=1}^k d_i^2 c_2 M \|\varphi\|^2\right\}$$

则 $t^{**} \in (t_k + \tau, t^*)$, $Ew(t^{**}) = \frac{1}{q} \prod_{i=1}^k u_i \prod_{i=1}^k d_i^2 c_2 M \|\varphi\|^2$ 。因为对任意 $t \in [t^{**}, t^*]$, 有 $ELw(t) \leq (\lambda + \beta^*) Ew(t)$, 则由 Gronwall 不等式可得

$$\begin{aligned} Ew(t^*) &\leq Ew(t^{**}) e^{\int_{t^{**}}^{t^*} (\lambda + \beta^*) ds} \leq \\ &\quad \frac{1}{q} \prod_{i=1}^k u_i \prod_{i=1}^k d_i^2 c_2 M \|\varphi\|^2 e^{(\lambda + \beta^*) \rho} \leq \\ &\quad \prod_{i=1}^k u_i \prod_{i=1}^k d_i^2 c_2 M \|\varphi\|^2 \end{aligned}$$

这是个矛盾, 所以

$$Ew(t) \leq \prod_{i=1}^k u_i \prod_{i=1}^k d_i^2 c_2 M \|\varphi\|^2, t \in [t_k + \tau, t_{k+1}) \quad (32)$$

综上, 有 $Ew(t) \leq c_2 M \|\varphi\|^2, t \geq t_0$ 。

所以 $EV(x(t) - cx(t-\tau), t) \leq c_2 M \|\varphi\|^2 e^{-\lambda(t-t_0)}$ 。

由条件1) 可得 $E|x(t) - cx(t-\tau)|^2 \leq \frac{1}{c_1} c_2 M \|\varphi\|^2 e^{-\lambda(t-t_0)}$ 。

故由引理4可得 $E|x(t)|^2 \leq A e^{-(\lambda \wedge \alpha)t}$ 。

其中

$$A = \left(\frac{c_2 M \|\varphi\|^2 e^{\lambda t_0}}{c_1 (1 - \varepsilon)^2} e^{\lambda \tau} + \frac{\tilde{c}}{\varepsilon} e^{(\lambda \wedge \alpha) \tau} \varphi_0 \right) \left(1 - \frac{\tilde{c}}{\varepsilon} e^{(\lambda \wedge \alpha) \tau} \right)^{-1},$$

$$0 < \tilde{c} < 1, \alpha = \frac{1}{\tau} \ln \frac{\varepsilon}{\tilde{c}}, \varphi_0 = \sup_{-\tau \leq t \leq 0} E|x(t)|^2$$

最后,由定义1得出方程(DW)的平凡解是均方指数稳定的,所以定理2得证。

定理3 若存在函数 $V \in C^{2,1}(R^n \times R_+; R_+)$, β_0 是固定的正常数,存在对称正定矩阵 Q 以及常数 β^* , 且存在函数 $u_1, u_2, \dots, u_i, \dots$, 其中 $u_i > 1, i \in N$, 使得下列条件成立:

- (1) $2(x(t) - cx(t - \tau))^T Q[-(A + \Delta A(t))x(t) + f(t, x(t), x(t - \tau))] + \text{trace}[\sigma^T(t, x(t), x(t - \tau))Q\sigma(t, x(t), x(t - \tau))] \leq \beta^*(x(t) - cx(t - \tau))^T Q(x(t) - cx(t - \tau));$
- (2) $\beta_0 + \beta^* < 0;$
- (3) $(x(t_i) - cx(t_i - \tau))^T Q(x(t_i) - cx(t_i - \tau)) \leq d_i^2(x(t_i^-) - cx(t_i^- - \tau))^T Q(x(t_i^-) - cx(t_i^- - \tau)), 0 < d_i^2 < 1;$
- (4) $(x(t_i + \tau) - cx(t_i))^T Q(x(t_i + \tau) - cx(t_i)) \leq u_i^2 d_i^2(x(t_i^- + \tau) - cx(t_i^-))^T Q(x(t_i^- + \tau) - cx(t_i^-)), 0 < u_i^2 d_i^2 < 1.$

则方程(DW)的解均方指数稳定。

证明 取 $I_k(\mu) = d_k \mu, k = 1, 2, \dots$, 且 $t_k - t_{k-1} > \tau$, 构造如下Lyapunov - Krasovskii泛函:

$$V(x(t) - cx(t - \tau), t) = e^{\beta_0 t} (x(t) - cx(t - \tau))^T Q(x(t) - cx(t - \tau))$$

当 $t \in [t_0, t_1]$ 时, 由方程(DW)和条件(1)得到

$$\begin{aligned} LV(x(t) - cx(t - \tau), t) &\leq \\ (\beta_0 + \beta^*)e^{\beta_0 t} (x(t) - cx(t - \tau))^T Q(x(t) - cx(t - \tau)) &= \\ (\beta_0 + \beta^*)V(x(t) - cx(t - \tau), t) \end{aligned}$$

故 $ELV(x(t) - cx(t - \tau), t) \leq (\beta_0 + \beta^*)EV(x(t) - cx(t - \tau), t)$ 。

由条件(2)可得

$$ELV(x(t) - cx(t - \tau), t) \leq 0, t \in [t_0, t_1] \quad (33)$$

对任意的 $t, t^* \in [t_0, t_1]$, 且 $t > t^*$, 运用Dynkin's公式得

$$\begin{aligned} EV(x(t) - cx(t - \tau), t) - EV(x(t^*) - cx(t^* - \tau), t^*) &= \\ \int_{t^*}^t ELV(x(s) - cx(s - \tau), s)ds &\leq 0 \end{aligned}$$

因此,

$$EV(x(t) - cx(t - \tau), t) \leq EV(x(t^*) - cx(t^* - \tau), t^*) \quad (34)$$

当 $t = t_1$ 时, 由条件(3)得到

$$\begin{aligned} V(x(t_1) - cx(t_1 - \tau), t_1) &= \\ e^{\beta_0 t_1} (x(t_1) - cx(t_1 - \tau))^T Q(x(t_1) - cx(t_1 - \tau)) &\leq \\ e^{\beta_0 t_1} d_1^2 (x(t_1^-) - cx(t_1^- - \tau))^T Q(x(t_1^-) - cx(t_1^- - \tau)) &\leq \\ V(x(t_1^-) - cx(t_1^- - \tau), t_1^-) \end{aligned} \quad (35)$$

当 $t \in [t_1, t_1 + \tau]$ 时, 由方程(DW)和条件(1)、(2)有

$$ELV(x(t) - cx(t - \tau), t) \leq 0, t \in [t_1, t_1 + \tau]$$

对任意的 $t, t' \in [t_1, t_1 + \tau]$, 且 $t > t'$, 由Dynkin's公式得

$$\begin{aligned} EV(x(t) - cx(t - \tau), t) - EV(x(t') - cx(t' - \tau), t') &= \\ \int_{t'}^t ELV(x(s) - cx(s - \tau), s)ds &\leq 0 \end{aligned}$$

因此,

$$EV(x(t) - cx(t - \tau), t) \leq EV(x(t') - cx(t' - \tau), t') \quad (36)$$

当 $t = t_1 + \tau$ 时, 由条件有

$$\begin{aligned} V(x(t_1 + \tau) - cx(t_1), t_1 + \tau) &= \\ e^{t_1 + \tau} (x(t_1 + \tau) - cx(t_1))^T Q(x(t_1 + \tau) - cx(t_1)) &\leq \\ u_1^2 d_1^2 e^{t_1 + \tau} (x(t_1^- + \tau) - cx(t_1^-))^T Q(x(t_1^- + \tau) - cx(t_1^-)) &\leq \\ V(x(t_1^- + \tau) - cx(t_1^-), t_1^- + \tau) \end{aligned} \quad (37)$$

当 $t \in [t_1 + \tau, t_2]$ 时, 可证得对任意的 $t, t^* \in [t_1 + \tau, t_2]$, 且 $t > t^*$, 有

$$EV(x(t) - cx(t - \tau), t) \leq EV(x(t^*) - cx(t^* - \tau), t^*) \quad (38)$$

当 $t = t_2$ 时, 由条件(3)可得到

$$V(x(t_2) - cx(t_2 - \tau), t_2) \leq V(x(t_2^-) - cx(t_2^- - \tau), t_2^-) \quad (39)$$

假设当 $t \in [t_{k-1} + \tau, t_k]$ 时, 对任意的 $t, t^* \in [t_{k-1} + \tau, t_k]$, 且 $t > t^*$ 时, $EV(x(t) - cx(t - \tau), t) \leq EV(x(t^*) - cx(t^* - \tau), t^*)$ 成立。

则当 $t = t_k$ 时, 由条件(3)得到

$$\begin{aligned} V(x(t_k) - cx(t_k - \tau), t_k) &\leq \\ e^{\beta_0 t_k} d_k^2 (x(t_k^-) - cx(t_k^- - \tau))^T Q(x(t_k^-) - cx(t_k^- - \tau)) &\leq \\ V(x(t_k^-) - cx(t_k^- - \tau), t_k^-) \end{aligned} \quad (40)$$

当 $t \in [t_k, t_k + \tau]$ 时, 对任意的 $t, t' \in [t_k, t_k + \tau]$, 且 $t > t'$ 时, 运用Dynkin's公式, 同理可证

$$EV(x(t) - cx(t - \tau), t) \leq EV(x(t') - cx(t' - \tau), t') \quad (41)$$

当 $t = t_k + \tau$ 时, 由条件(4)可知

$$V(x(t_k + \tau) - cx(t_k), t_k + \tau) \leq V(x(t_k^- + \tau) - cx(t_k^-), t_k^- + \tau) \quad (42)$$

当 $t \in [t_k + \tau, t_{k+1}]$ 时, 对任意的 $t, t^* \in [t_k + \tau, t_{k+1}]$, 且 $t > t^*$, 可证得

$$EV(x(t) - cx(t - \tau), t) \leq EV(x(t^*) - cx(t^* - \tau), t^*) \quad (43)$$

所以综上有

$$\begin{aligned} EV(x(t_k) - cx(t_k - \tau), t_k) &\leq \\ EV(x(t_k^-) - cx(t_k^- - \tau), t_k^-) &\leq \\ EV(x(t_{k-1} + \tau) - cx(t_{k-1}), t_{k-1} + \tau) &\leq \\ \dots &\leq \\ EV(x(0) - cx(-\tau), 0) \end{aligned} \quad (44)$$

所以

$$\begin{aligned} e^{\beta_0 t} (\lambda_{\min}(Q))E|x(t) - cx(t - \tau)|^2 &\leq \\ EV(x(t) - cx(t - \tau), t) &\leq \\ EV(x(0) - cx(-\tau), 0) \end{aligned} \quad (45)$$

又由 $V(x(0) - cx(-\tau), 0)$ 的定义, 得

$$EV(x(0) - cx(-\tau), 0) \leq (\lambda_{\max}(\mathbf{Q}))E|x(0) - cx(-\tau)|^2$$

所以 $E|x(t) - cx(t-\tau)|^2 \leq \left(\frac{\lambda_{\max}(\mathbf{Q})}{\lambda_{\min}(\mathbf{Q})}\right)E|x(0) - cx(-\tau)|^2 e^{-\beta_0 t}$ 。

因此,由引理4得出 $E|x(t)|^2 M e^{-(\beta_0 \wedge \alpha)t}$ 。

其中

$$M = \left(\frac{e^{\beta_0 \tau} \lambda_{\max}(\mathbf{Q})}{(1-\varepsilon)^2 \lambda_{\min}(\mathbf{Q})} E|x(0) - cx(-\tau)|^2 + \frac{\tilde{c}}{\varepsilon} e^{(\beta_0 \wedge \alpha)\tau} \varphi_0 \right) \left(1 - \frac{\tilde{c}}{\varepsilon} e^{(\beta_0 \wedge \alpha)\tau} \right)^{-1}$$

$$0 < \tilde{c} < 1, \alpha = \frac{1}{\tau} \ln \frac{\varepsilon}{\tilde{c}}, \varphi_0 = \sup_{-\tau \leq t \leq 0} E|x(t)|^2$$

所以由定义1可得,定理3得证。

参考文献:

- [1] LIU K. Stability of infinite dimensional stochastic differential equations with applications[M]. London: Chapman & Hall/CRC, 2005.
- [2] MAO X R. Exponential stability in mean square of neutral stochastic differential functional equations [J]. *Systems and Control Letters*, 1995, 26(4): 245-251.
- [3] GUO C J, O'REGAN D, DENG F Q. Fixed points and exponential stability for a stochastic neutral cellular network [J]. *Applied Mathematics Letters*, 2013, 26(8): 849-853.
- [4] LI D S, FAN X M. Exponential stability of impulsive stochastic partial differential equations with delays [J]. *Statistics and Probability Letters*, 2017, 126: 185-192.
- [5] HU W, ZHU Q X. Moment exponential stability of stochastic nonlinear delay systems with impulse effects at random times [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2009, 29: 3809-3820.
- [6] FU X Z, ZHU Q X, GUO Y X. Stabilization of stochastic functional differential systems with delayed impulses [J].

Applied Mathematics and Computation, 2019, 346: 776-789.

- [7] YU G S, YANG W Q, XU L. Pth moment and almost sure exponential stability of impulsive neutral stochastic functional differential equations with markovian switching [J]. *International Journal of Systems Science*, 2018, 49(6): 1164-1177.
- [8] LUO J W. Fixed points and exponential stability of mild solutions of stochastic partial differential equations with delays [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2008, 342(2): 753-760.
- [9] 徐林, 宋常修. 一类三阶时滞微分方程的稳定性和有界性[J]. *广东工业大学学报*, 2015, 32(1): 128-132.
- XU L, SONG C X. Stability and boundedness of a class of third-order delay differential equations [J]. *Journal of Guangdong University of Technology*, 2015, 32(1): 128-132.
- [10] CHENGUP, DENG F Q. Global exponential stability of impulsive stochastic functional Differential systems [J]. *Statistics and Probability Letters*, 2010, 80(23-24): 1854-1862.
- [11] CHENGUP, DENGUF Q, YAOUF Q. Almost sure exponential stability and stochastic stabilization of stochastic differential systems with impulsive effects [J]. *Nonlinear Analysis Hybrid Systems*, 2018, 30: 106-117.
- [12] CUI J, YAN L T. Asymptotic behavior for neutral stochastic partial differential equations with infinite delays [J]. *Electronic Communications in Probability*, 2013, 18(45): 1-12.
- [13] CHEN G L, GAANS O V, LUNEL S V. Existence and exponential stability of a class of impulsive neutral stochastic partial differential equations with delays and Poisson jumps [J]. *Statistics and Probability Letters*, 2018, 141: 7-18.
- [14] MAO X R. Stochastic differential equations and applications[M]. Chichester: Horwood Publishing Limited, 2007.
- [15] XU Y, HE Z M. Exponential stability of neutral stochastic delay differential equations with Markovian switching [J]. *Applied Mathematics Letters*, 2016, 52: 64-73.

(责任编辑: 赵少飞)